Piano Lauree Scientifiche Piemonte 2013,
in collaborazione con il Dipartimento di Matematica
dell'Università di Torino

Enrico Bibbona, Paolo Boggiatto,
Evanthia Carypis, Marina De Simone, Monica Panero

GARE E GIOCHI MATEMATICI: STUDENTI ALL'OPERA

A cura di:

Ornella Robutti

Ledizioni

Via Alamanni, 11 - 20141 Milano - Italy
www.ledizioni.it
info@ledizioni.it

Enrico Bibbona, Paolo Boggiatto, Evanthia Carypis, Marina De Simone, Monica Panero
GARE E GIOCHI MATEMATICI: STUDENTI ALL'OPERA
A cura di: Ornella Robutti, Ledizioni 2014
ISBN

Immagine in copertina:

Informazioni sul catalogo e sulle ristampe dell'editore: www.ledizioni.it

PRESENTAZIONE

Il Piano nazionale Lauree Scientifiche in Piemonte

Ornella Robutti, *Dipartimento Matematica Università di Torino*
Responsabile PLS Piemonte

Il Piano nazionale Lauree Scientifiche

Il "Progetto Lauree Scientifiche" (PLS) nasce nel 2004 dalla collaborazione del Ministero dell'Università e dell'Istruzione, della Conferenza Nazionale dei Presidi di Scienze e Tecnologie (Con. Scienze) e di Confindustria, con l'obiettivo iniziale di incrementare le iscrizioni ai corsi di laurea in Chimica, Fisica, Matematica e Scienze dei Materiali.

Nella sua prima attuazione (quadriennio 2005-2008) si è orientato su tre filoni fondamentali:

- coinvolgimento degli studenti in attività di laboratorio per migliorare la conoscenza e la percezione delle discipline scientifiche nella Scuola Secondaria di II grado;
- formazione degli insegnanti in servizio nella Scuola Secondaria di II grado attraverso un percorso virtuoso di crescita professionale basato sulla collaborazione Scuola-Università;
- incentivazione di attività di stage e tirocini presso Università, Enti di ricerca pubblici e privati, imprese impegnate in ricerca e sviluppo per favorire il contatto e la collaborazione Scuola-Università e Università-Mondo del Lavoro.

Visti i risultati positivi raggiunti nella prima attuazione del Progetto, il Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca ha rilanciato il PLS, trasformandolo nel "Piano nazionale Lauree Scientifiche" nel 2009 con l'obiettivo principale di mettere a sistema le buone pratiche e le sperimentazioni attuate, e programmare nuove azioni in grado di rafforzare i legami Scuola-Università da un lato, e Università-Mondo del Lavoro dall'altro.

Il nuovo "Piano nazionale Lauree Scientifiche", come si evince dalla linee guida (MIUR, 2010) mantiene le finalità di quello che lo ha preceduto, in particolare:

<u>Finalità di orientamento</u>:

- offrire agli studenti degli ultimi anni delle scuole superiori opportunità di conoscere temi, problemi e procedimenti caratteristici dei saperi (scientifici), anche in relazione ai settori del lavoro e delle professioni, al fine di individuare interessi e disposizioni specifiche e fare scelte consapevoli in relazione a un proprio progetto personale;
- mettere in grado gli studenti degli ultimi anni delle scuole superiori di autovalutarsi, verificare e consolidare le proprie conoscenze in relazione alla preparazione richiesta per i diversi corsi di laurea (scientifici);

<u>Finalità di formazione degli insegnanti</u>:

- perfezionare le conoscenze disciplinari e interdisciplinari degli insegnanti e la loro capacità di interessare e motivare gli allievi nell'apprendimento delle materie scientifiche, nonché di sostenerli nel processo di orientamento pre-universitario.

Tali finalità andranno perseguite anche attraverso una revisione dei contenuti e delle metodologie dell'insegnamento-apprendimento alla luce delle nuove Indicazioni Nazionali.

Le azioni del PLS riguardano dunque in primo luogo l'orientamento degli studenti, pensato come un'attività in cui lo studente non sia soggetto che subisce passivamente, ma si confronti in prima persona con temi, problemi, metodologie e idee propri delle discipline scientifiche. In secondo luogo riguardano la formazione degli insegnanti, pensata come attività in cui gli insegnanti siano protagonisti, vengano coinvolti in esperienze a partire da problemi concreti, e arricchiscano la propria professionalità attraverso il confronto con i colleghi e con gli esperti.

La realizzazione di laboratori, organizzati dalle Università e rivolti ai docenti della Scuola, che prevedono la sperimentazione in classe di quanto progettato, fonde insieme le due finalità del PLS.

Le attività implementate all'interno del PLS sono dunque inserite nel processo di innovazione dei curricola e delle metodologie didattiche adottate nelle scuole, ma anche nel processo di formazioni degli insegnanti (iniziale o in servizio).

Al fine di confrontare le azioni che, nei quasi dieci anni di attività, sono state messe in campo dai differenti attori coinvolti nel PLS e per contestualizzare a livello più ampio il progetto si è tenuto a Napoli, nel mese di Dicembre 2013, il "Convegno scientifico sul PLS" che ha registrato la partecipazione di Docenti Universitari, Ricercatori e Insegnanti. Si è trattato di un proficuo momento di scambio e di riflessione sulle tematiche cardine del PLS, di cui riportiamo un breve resoconto nel capitolo conclusivo del presente volume.

Le attività PLS in Piemonte

Il polo Piemontese partecipa al PLS sin dalla sua nascita nel 2005, riscontrando una buona partecipazione degli insegnanti e delle Scuole e una ricaduta positiva sugli studenti.

In questi anni si è infatti assistito a un incremento considerevole delle immatricolazioni ai corsi di laurea scientifici. Questo rappresenta un buon punto di partenza per incoraggiarci a lavorare ancora in questa direzione.

A partire dallo scorso anno sono state apportate delle modifiche all'interno dell'organizzazione delle attività PLS, per ovviare ad alcune criticità. In particolare per massimizzare la resa e la ricaduta sugli studenti dei laboratori rivolti agli insegnanti si è deciso di utilizzare moduli di formazione "più snelli", che prevedessero la formazione in presenza e a distanza, attraverso la piattaforma Moodle DI.FI.MA (http://difima.i-learn.unito.it). I moduli sono stati articolati su 18 ore così suddivise: 6 ore in presenza (3 incontri da 2 ore), 6 ore di sperimentazione in classe, 6 ore di autoformazione e lavoro a distanza in comunità tramite piattaforma.

La scelta dei temi da affrontare nei moduli si è orientata maggiormente all'integrazione delle attività nel curricolo, fornendo la possibilità agli insegnanti coinvolti di co-progettare le attività da svolgere in classe, con il supporto degli esperti. Sono stati proposti sei moduli di formazione afferenti a differenti nuclei concettuali e contenuti (statistica, geometria sintetica, successioni, funzioni, storia della matematica), ma uniti dall'idea di modello e di rappresentazione dinamica, anche attraverso l'uso delle tecnologie (GeoGebra per esempio).

Si è inoltre lavorato sul coinvolgimento delle istituzioni, anche attraverso le modalità di iscrizione, affinché fossero le scuole e non i docenti singoli ad aderire alle attività PLS. Questa scelta rende le scuole maggiormente partecipi al progetto, consente di condividere l'esperienza del PLS al loro interno e di sedimentarla nel tempo, rendendo accessibili fondi che sono disponibili per le scuole dopo un certo numero di anni consecutivi di partecipazione al Piano.

Nell'anno 2012-2013 sono poi state realizzate per la prima volta delle attività direttamente rivolte agli studenti: le gare matematiche, di cui questo volume raccoglie descrizioni e osservazioni.

Le gare sono state pensate per essere un momento non competitivo, ma di collaborazione e costruzione collettiva di significati matematici. Per questo motivo le attività si sono svolte a squadre formate da studenti provenienti da classi e scuole differenti. I temi affrontati nella gare spaziano dalla logica matematica, alla modellizzazione di giochi e al calcolo della probabilità, alla composizione di funzioni e loro rappresentazione.

Al termine delle gare sono state presentate delle conferenza orientative per illustrare come la matematica permei la vita di tutti i giorni e quali possono essere gli sbocchi professionali per un laureato in discipline scientifiche.

La Trasposizione Meta-Didattica

I modelli formativi utilizzati dai ricercatori per contestualizzare le attività e la formazione dei docenti sono molteplici. Il gruppo di ricerca di Torino insieme a quello di Modena ha elaborato nel 2012 (presentandolo al Seminario Nazionale di Ricerca in Didattica della Matematica: http://www.seminariodidama.unito.it/mat12.php) un modello innovativo che prende il nome di Trasposizione Meta-Didattica in cui i docenti vengono osservati nel loro processo di formazione per verificare se e come alcune metodologie didattiche più "tradizionali" vengano sostituite da attività laboratoriali, anche mediante l'impiego di tecnologie.

Il modello della Trasposizione Meta-Didattica si fonda sulla Teoria Antropologica della Didattica della Matematica (Chevallard, 1999), ma si riferisce al contesto specifico della formazione dei docenti (considerando le azioni di ricercatori, formatori e docenti) e si focalizza principalmente sugli aspetti "meta", che riguardano la riflessione sul processo di formazione stesso.

Il modello fa riferimento a due tipi di comunità, coinvolti nel processo di formazione degli insegnanti: la comunità dei ricercatori (che organizza e gestisce le attività di formazione) e la comunità degli insegnanti (cha partecipano al progetto).

Ciascuna delle due comunità possiede delle prasseologie proprie. Quando parliamo di prasseologie, facciamo riferimento a quello che Garcia et al (2006) declinano in due aspetti fondamentali: la *praxis* da un lato e il *logos* dall'altro. Cioè il "know how" (praxis), che comprende classi di problemi simili e le loro metodologie risolutive e la "knowledge" (logos) cioè il "discorso" che descrive, spiega e giustifica le metodologie usate e ne produce delle nuove (Garcia et al., 2006). La nostra attenzione si focalizza non tanto sulle prasseologie didattiche (che fanno riferimento ai compiti dell'allievo e del docente coinvolti nel processi di insegnamento-apprendimento), ma soprattutto su quelle meta-didattiche che comprendono tutte le forme di interazione con gli insegnanti in formazione (pratiche e riflessioni).

Mentre la Trasposizione Didattica consiste nel meccanismo attraverso il quale si converte la conoscenza ("sapere sapiente") nella conoscenza insegnata nelle scuole ("sapere insegnato"), la Trasposizione Meta-Didattica considera il meccanismo con il quale le prasseologie proprie della comunità di ricerca vengono trasposte alle comunità di insegnanti, e in che modo questa trasposizione trasforma la professionalità dei docenti. Si assiste quindi a uno spostamento dal "sapere sapiente" alle conoscenze matematiche e pedagogiche necessarie per l'insegnamento (Arzarello et al., 2012; Aldon et al., 2013; Arzarello et al., 2014).

Le prasseologie di ricercatori e insegnanti possono essere, già in partenza, a intersezione non vuota, ma lo scopo delle attività di formazione dei docenti è quello di trasformare le prasseologie degli insegnanti in nuove prasseologie, che siano una fusione delle prasseologie delle due comunità coinvolte, diventando quindi delle prasseologie condivise.

Per la creazione delle prasseologie condivise è fondamentale la figura del "broker" (mediatore), che è quel soggetto che appartiene a più di una comunità ed è in grado di creare nuove connessioni tra di esse e aprire nuove possibilità di creazione di significati e di apprendimento (Rasmussen et al., 2009). La trasposizione è allora centrata su specifiche azioni di "brokering" tra le varie comunità (che possono essere identificate a seconda dei contesti nell'apprendistato cognitivo, nella formazione blended tramite piattaforma e incontri in presenza delle attività di formazione docenti PLS, …).

Nel processo di Trasposizione Meta-Didattica entrano in gioco due tipi di componenti, quelle esterne e quelle interne. Le componenti interne sono tutte le tecniche, tecnologie e teorie che hanno prodotto le prasseologie dei ricercatori, mentre sono componenti esterne le prasseologie proprie delle istituzioni da cui provengono gli insegnanti in formazione.

L'obiettivo che si vuole raggiungere con i laboratori di formazione docenti PLS, è quello di confrontare le prasseologie dei ricercatori con quelle proprie degli insegnanti, per creare della prasseologie condivise che possano essere applicate in classe e che diventino patrimonio ordinario della professionalità docente. Le componenti esterne (la partecipazione ai laboratori del PLS per esempio, l'uso della piattaforma per la formazione a distanza, le Indicazioni Nazionali e le Linee Guida, l'uso di tecnologie per la matematica, …) si trasformano man mano che avviene il "brokering" in componenti interne e contribuiscono alla creazione delle prasseologie condivise.

Il territorio

Tutte le attività PLS che sono state attivate sono state declinate in accordo ai quadri teorici di riferimento: le Indicazioni Nazionali, le raccomandazioni OCSE-PISA e le Linee Guida Invalsi.

Abbiamo inoltre cercato di lavorare molto a livello del Piemonte, per creare sinergia tra le istituzioni del territorio e le azioni e i progetti di ricerca che sono messi in campo. In questo modo è stato possibile collegare le attività PLS ai vari progetti già in corso, come per esempio la piattaforma di formazione permanente DI.FI.MA (http://difima.i-learn.unito.it/), l'omonimo convegno biennale (http://www.difima.unito.it/difima13/), l'Istituto di GeoGebra di Torino (http://community.geogebra.org/it/), il piano m@at.abel (http://risorsedocentipon.indire.it/offerta_formativa/f/index.php?action=home&area_t=f&id_ambiente=7) e le varie iniziative di orientamento e formazione che l'Università attiva. La collaborazione tra i vari soggetti coinvolti negli anni: Università, USR, Provincia di Torino, Scuole, Istituto di GeoGebra di Torino e La casa degli Insegnanti ha reso possibile, nello scorso anno, l'attivazione di ben 6 moduli di formazione per i docenti e 3 iniziative di gare matematiche per gli studenti.

L'attività del PLS si colloca inoltre in continuità con le esperienze passate di formazione docenti in matematica (e in fisica):

- dal 2003 il Convegno DI.FI.MA.;
- dal 2008 la piattaforma DI.FI.MA. in rete e tutte le sue iniziative di seminari, incontri e produzione di materiali (al momento – 2014 – ha raggiunto circa 1700 iscritti);
- dal 2010 i corsi di formazione dei docenti di matematica.

La piattaforma di formazione permanente DI.FI.MA. riveste un ruolo fondamentale per le attività del PLS, infatti le attività di formazioni a distanza dei vari moduli PLS sono erogate attraverso la piattaforma, che ospita tutti i materiali e consente un proficuo scambio tra insegnanti ed esperti.

La sinergia ha inoltre coinvolto la formazione iniziale dei docenti (il TFA Ordinario avviato nell'anno 2012 e i PAS avviati nel 2014), i docenti-studenti hanno potuto analizzare alcune delle attività contenute nei vari laboratori attivati e proporle nelle classi in cui hanno svolto il Tirocinio.

Lo scambio di esperienze, contenuti e metodologia tra docenti in servizio, docenti in formazione, esperti, docenti universitari e ricercatori costituisce il valore aggiunto del PLS.

In questo ultimo anno scolastico (2012-13) abbiamo registrato la partecipazione alle varie iniziative PLS di circa 100 docenti e 2200 studenti.

Le gare matematiche

L'idea di proporre agli studenti delle attività ludico-creative che possano veicolare contenuti e competenze matematiche fa riferimento alla didattica di tipo costruttivista e si basa su quello che Collins et al. (1987) chiamano apprendistato cognitivo e che vede la sua evoluzione nella costituzione di comunità di pratica (Wenger, 1998).

L'elemento cardine delle varie attività proposte nelle gare è quello del laboratorio di matematica, non tanto pensato come luogo fisico, separato dalla classe, quanto come metodologia attraverso la quale imparare facendo e attraverso cui costruire significati matematici (Arzarello & Robutti, 2002; UMI, 2003) lavorando a gruppi in modo collaborativo.

Attività di questo tipo si inseriscono nel filone dell'insegnamento per problemi (Arzarello & Robutti, 2002), ma possono anche essere viste alla luce della didattica per competenze in quanto mobilitano apprendimenti-risorsa per l'acquisizione della competenza e vedono gli studenti impegnati in attività nuove e diverse da quelle di tipo strettamente curricolare.

Abbiamo voluto, quindi, fondare su questo quadro di riferimento le attività del PLS rivolte direttamente agli studenti, proponendo gare a squadre formate da allievi di classi e scuole diverse, che lavorando per la prima volta insieme hanno dovuto mettere in campo tutte le risorse e le competenze di ogni componente per costituire una comunità di pratica volta al raggiungimento dell'obiettivo: vincere la gara. La componente di competizione è stata significativo stimolo per i gruppi di lavoro, ma non ha interferito sulla possibilità di tutti i membri del gruppo di apportare essenziali contributi alla risoluzione.

Questo volume

Questo volume è il secondo che nasce dall'esperienza PLS dell'anno 2012-13, dopo il volume "Esplorazioni matematiche con GeoGebra" (Accomazzo, Beltramino e Sargenti, 2013).

Nasce come realizzazione del progetto di giochi e gare matematiche rivolte agli studenti delle Scuole Secondarie di II grado, nell'ambito del Piano Lauree Scientifiche di Matematica coordinato dalla sottoscritta nell'anno 2012-13.

I giochi e le gare (non competitivi) hanno coinvolto gli studenti del secondo anno del I biennio, e quelli del II biennio, per un totale di circa 300 studenti e 8 docenti.

Nel volume vogliamo presentare le attività proposte, differenziate per classe, con indicazioni delle metodologie, dei contenuti matematici coinvolti e degli obiettivi di apprendimento, per fornire agli insegnanti utili strumenti per poter utilizzare in classe queste attività e approfondire alcuni nuclei tematici.

Nel volume convergono quindi le competenze degli autori, ma anche osservazioni dei processi degli studenti coinvolti nelle gare.

Desideriamo ringraziare in particolare i dirigenti scolastici degli istituti che hanno ospitato le gare, tutti i dirigenti scolastici e i docenti delle classi coinvolte. Ringraziamo inoltre la dott.ssa Federica Broglio, che ha seguito lo svolgimento delle gare e le ha analizzate nella sua tesi triennale in Matematica e la prof.ssa Elisa Gentile che ha curato la revisione e l'editing di questo volume.

INTRODUZIONE

GARE E GIOCHI MATEMATICI: STUDENTI ALL'OPERA

Enrico Bibbona, Paolo Boggiatto, Evanthia Carypis, Marina De Simone, Monica Panero
Dipartimento Matematica Università di Torino

In questo volume sono descritti i laboratori rivolti agli studenti, progettati e realizzati per il Piano Lauree Scientifiche nell'A.S. 2012-2013 dal gruppo di lavoro coordinato dalla Professoressa Ornella Robutti (responsabile del PLS Piemonte per la matematica) e formato da Paolo Boggiatto (Professore Associato), Enrico Bibbona (Ricercatore), Evanthia Carypis, Marina De Simone e Monica Panero (dottoresse in Matematica e Dottorande). Inoltre, tutti i laboratori sono stati seguiti da Federica Broglio che, nella sua tesi di laurea triennale in matematica, ne ha riportato l'analisi e ne ha descritto lo svolgimento.

I laboratori del **PLS**

All'interno di questo volume incontreremo spesso i termini "laboratorio", "attività" e "gara". È opportuno chiarire fin da subito che essi non sono tra loro interscambiabili.

Il laboratorio di matematica, come descritto nel curricolo Matematica 2003, consiste in "un insieme strutturato di attività volte alla costruzione di significati degli oggetti matematici. Il laboratorio, quindi, coinvolge persone (studenti e insegnanti), strutture (aule, strumenti, organizzazione degli spazi e dei tempi), idee (progetti, piani di attività didattiche, sperimentazioni)". Da questa definizione, deduciamo che con "laboratorio" si intende l'intera esperienza, mentre l'"attività" ne rappresenta una specifica componente. A sua volta un'"attività" può essere proposta sotto forme diverse: verifica, gara, approfondimento, ecc.

Nell'ambito del **PLS**, le attività dei laboratori sono state pensate sotto forma di gara e presentano le seguenti caratteristiche principali:

- possono essere curricolari o extra-curricolari;
- necessitano di un gruppo di studenti di numerosità adeguata affinché la discussione e l'interazione permettano di raggiungere gli obiettivi fissati;
- possono avere luogo in spazi differenti, come istituti scolastici, università, centri di ricerca, ecc., purché siano sufficientemente ampi per contenere un congruo numero di gruppi di studenti;
- sono rivolte a studenti del primo e secondo biennio della scuola secondaria di II grado.

Vi sono, poi, tre tipologie principali di laboratorio.

1. Laboratori che offrono l'esperienza di fenomeni e problemi matematico-scientifici significativi, collegati con l'esperienza quotidiana, la ricerca, ecc.
2. Laboratori che offrono l'occasione di affrontare problemi e situazioni di apprendimento tipici dell'ambiente universitario, e stimolano a completare la propria preparazione anche tramite l'aiuto dei docenti.
3. Laboratori di approfondimento per gli studenti più motivati e capaci.

I laboratori pensati per il **PLS** possono rientrare in ognuna delle categorie sopra elencate, in quanto, come vedremo in dettaglio nei capitoli successivi, essi possiedono tutte le caratteristiche descritte.

I laboratori che presentiamo in questo volume si suddividono in due parti: la prima è dedicata alla gara in sé, ovvero allo svolgimento di un insieme di attività a cui gli studenti partecipano suddivisi in piccoli gruppi; la seconda prevede una conferenza di approfondimento rivolta a tutti i ragazzi coinvolti.

Le attività descritte nei prossimi capitoli sono tre: una caccia al tesoro ("L'isola di Baal", presentata nel Capitolo 1) e due giochi ("Il frutteto" e "Indovina la funzione!", contenuti rispettivamente nei Capitoli 2 e 3). Esse differiscono per tipologia e contenuti, in coerenza con il background matematico dei partecipanti coinvolti. Infatti, pur non volendo valutare le conoscenze matematiche dei ragazzi, si è cercato di costruire ciascuna attività in modo che gli studenti interessati fossero in possesso dei requisiti necessari per svolgerla. In particolare, la caccia al tesoro, pensata per le classi seconde, contiene problemi di logica, mentre gli altri due giochi, "Il frutteto" e "Indovina la funzione!", elaborati per le classi terze e quarte, trattano concetti di probabilità e nozioni elementari sulle funzioni e la loro composizione.

Per quanto concerne il tema delle conferenze, si è utilizzato lo stesso criterio delle attività, ovvero esse sono state preparate dagli autori tenendo conto del tipo di pubblico uditore. In particolare, la conferenza intitolata "La Matematica nei videogiochi" è rivolta al primo biennio, mentre "Che cos'è e a cosa serve la Matematica?" è pensata per studenti del secondo biennio. Rimandiamo al Capitolo 4 per i dettagli.

Finalità e Metodologia delle Gare

L'iniziativa di inserire le gare all'interno del Piano Lauree Scientifiche (**PLS**) è nata per dare agli studenti la possibilità di vedere la matematica in una veste diversa da quella con cui si presenta solitamente nella routine scolastica. L'approccio didattico, per lo più diffuso, è basato su un tipo d'insegnamento trasmissivo volto a insegnare la conoscenza matematica attraverso leggi e regole che lo studente ha il compito di imparare ed esporre quando richiesto. Tuttavia, da tale approccio, potrebbe derivare un atteggiamento passivo nei confronti della matematica, poiché lo studente è portato a risolvere esercizi simili a quelli trattati a lezione dall'insegnante, in maniera meccanica, spesso convinto di ricevere una valutazione sul modo di "fare", senza capire il *"perché"* di ciò che apprende. L'attività di **PLS** fa leva su un tipo di approccio costruttivista, in cui lo studente è chiamato in prima persona a immaginare, scoprire, congetturare e argomentare i processi che descrivono un determinato fenomeno, mettendo alla prova le conoscenze e gli strumenti a sua disposizione. È un approccio basato su un'attività di *problem solving*, in cui il ragazzo si ritrova a descrivere e modellizzare situazioni tratte dal reale, risolvere problemi, produrre un evento o un oggetto tramite discussioni all'interno di un gruppo, con altri studenti. L'insegnante funge da allestitore di situazioni di apprendimento, da mediatore e interviene solo per supportare e indirizzare lo studente, senza imporsi. Un'attività nella quale gli studenti si limitano esclusivamente ad ascoltare e osservare la lezione non rientra nell'idea di laboratorio come il **PLS** la intende.

Non volendo valutare le conoscenze matematiche dei ragazzi, i temi proposti durante le gare non fanno esclusivo riferimento a contenuti specifici del curricolo scolastico, ma si estendono a un quadro più ampio e generale. Il **PLS** si pone, infatti, come occasione per presentare agli studenti contenuti matematici e metodologie già noti (come le funzioni, le trasformazioni del piano, ecc.), in una prospettiva differente da quella adottata in aula, oltre che conoscenze ancora poco approfondite a lezione o, addirittura, del tutto nuove (come la logica e il calcolo delle probabilità).

I laboratori organizzati per il **PLS** hanno rappresentato un'occasione d'incontro non competitivo tra studenti iscritti nello stesso istituto o provenienti da istituti differenti. Infatti, anche se le attività sono state proposte sotto forma di gara, l'obiettivo non era certo quello di creare competizione tra scuole o tra classi, bensì quello di porre i ragazzi in situazioni di lavoro di gruppo cooperativo e collaborativo. In conformità con tale idea, come sarà descritto in dettaglio nei capitoli seguenti, i responsabili di ogni gara hanno formato le squadre a partire dagli elenchi forniti dalle scuole, cercando di combinare tra loro studenti di classi diverse. Tale scelta metodologica si è rivelata decisiva durante lo svolgimento delle gare. Tutti gli studenti, infatti, si sono ritrovati coinvolti in una situazione di confronto con persone non scelte da loro, senza per questo avere il timore di essere giudicati, anzi, avendo l'incentivo a discutere e mettersi in gioco. Incoraggiare le capacità di produrre, comunicare e confrontare strategie di risoluzione, rientrano tra le principali finalità del **PLS**. A tal proposito, oltre a costruire squadre miste, si è pensato volutamente di consegnare a ogni gruppo una sola scheda per ciascun'attività o prova, al fine di focalizzare l'attenzione di tutti i membri su un unico foglio. Tale tecnica ha dissuaso gli studenti dal lavorare singolarmente, favorendo piuttosto la scelta comune di un portavoce, designato alla lettura del testo e alla consegna della soluzione discussa e condivisa nel gruppo.

I materiali

Il volume raccoglie dunque i materiali utilizzati per i laboratori **PLS** rivolti agli studenti nell'A.S. 2012-2013. Le gare sono state organizzate a partire da alcune tematiche che si sono ritenute centrali nel curricolo di matematica: le funzioni elementari e la loro composizione, la rappresentazione grafica di funzioni e il passaggio dal registro grafico a quello simbolico per "Indovina la funzione!", il concetto di modello matematico e il calcolo delle probabilità per "Il Frutteto" e le isometrie del piano e la logica delle proposizioni per "L'isola di Baal".

È stato dedicato un capitolo a ciascuna gara. Tutti i capitoli risultano organizzati secondo la medesima struttura, per facilitarne la fruizione da parte degli insegnanti che volessero riproporre le gare o le singole attività nelle proprie classi.

Abbiamo riportato in ogni capitolo una breve introduzione alla gara, i riferimenti alle Indicazioni Nazionali e alle Linee Guida e i Nuclei coinvolti (secondo UMI, 2003).

Ogni capitolo contiene una descrizione dell'attività per gli insegnanti articolata nei seguenti punti:

- Contesto;
- Ordine di scuola;
- Materiale;
- Prerequisiti e obiettivi;
- Descrizione attività e indicazioni metodologiche;
- Tempo di svolgimento previsto;
- Contenuti matematici.

Ciascun capitolo contiene inoltre le schede per gli studenti, le soluzioni ai problemi proposti, alcuni approfondimenti e il resoconto delle gare effettivamente svolte, con analisi e commenti.

Le indicazioni e le schede sono accompagnate da icone che consentono la loro rapida individuazione come esplicato nella seguente legenda:

	Richiamo alle Indicazioni Nazionali e alle Linee Guida
	Descrizione dell'attività per gli insegnanti
	Scheda per gli studenti
	Soluzioni ai problemi e scheda per l'insegnante
	Analisi e commenti delle gare effettuate
	Approfondimento

Il quarto capitolo è dedicato alle conferenze, rivolte agli studenti, che si sono tenute al termine della gara e che unitamente alle attività della gara stessa costituiscono il laboratorio completo.

Nel quinto capitolo abbiamo voluto inserire un resoconto del Convegno scientifico sul PLS, tenutosi a Napoli nei giorni 12 e 13 dicembre 2013, per inquadrare i laboratori attivati in Piemonte nel contesto nazionale, di più ampio respiro.

Al fondo del volume è inserita una bibliografia-sitografia utile per approfondimenti, sia riguardanti aspetti di ricerca in didattica della matematica, sia riguardanti normative e progetti ministeriali, sia a proposito dei contenuti matematici trattati.

CAPITOLO 1

Le attività proposte: "L'Isola di Baal"

Introduzione

L'attività di caccia al tesoro descritta in questo capitolo non necessita di un background matematico particolarmente approfondito da parte degli allievi coinvolti, ma si basa su prove di logica matematica risolvibili attraverso il linguaggio naturale del tipo "se, allora" e mediante connettivi propri della lingua italiana come "e", "o". La storia su cui è costruita la caccia al tesoro si sviluppa man mano che i problemi proposti trovano soluzione. Uno solo tra i quesiti presenti richiede una conoscenza di tipo geometrico, seppur minima, che riguarda la nozione di simmetria nel piano. Ma nel complesso tale laboratorio è basato su prove superabili tramite ragionamenti propri della vita quotidiana. Il livello di conoscenza matematica degli studenti, in questo primo arco di studi, è ancora limitato, poiché molti argomenti previsti dal curriculo scolastico possono non essere stati ancora affrontati oppure, anche se già trattati, possono non essere stati rielaborati e assimilati dagli studenti. Sono proprio questi processi di rielaborazione e assimilazione della conoscenza, infatti, che richiedono non poco tempo affinché si raggiunga un livello di familiarizzazione adeguato con l'oggetto matematico in questione.

Presentandosi sotto forma di gioco, la caccia al tesoro si caratterizza per il suo approccio innovativo rispetto a quello didattico-tradizionale, creando una predisposizione diversa da parte dei ragazzi. Quasi inconsapevolmente, infatti, essi si lasciano coinvolgere dal gioco e, con grande entusiasmo, si ritrovano a risolvere problemi di logica senza essere disturbati dal fatto, che in realtà, stanno *facendo matematica*. È come se, vista da questa prospettiva, il *fare matematica* diventi un'attività straordinariamente piacevole e divertente. Questo era, in effetti, lo scopo che si voleva raggiungere.

Il laboratorio realizzato rispecchia la volontà di trovare un compromesso tra l'idea di attività didattica e quella di scoperta accompagnata dal gioco. In recenti documenti ministeriali si può ritrovare questa stessa idea di lavoro: "*L'insegnamento della matematica fornisce uno strumento intellettuale di grande importanza: se da un lato le competenze matematiche si rivelano oggi essenziali per comprendere, interpretare e usare le conoscenze scientifiche e tecnologiche indispensabili anche nella vita quotidiana, all'educazione matematica va soprattutto riconosciuto un contributo specifico per la formazione di una struttura di pensiero razionale e critico, che la rende strumento irrinunciabile di crescita culturale e umana*"[1].

Segnaliamo che per le prove della caccia al tesoro ci siamo riferiti in parte al testo di Raymond Smullyan (1981), originale raccolta di passatempi logici.

Riferimenti alle indicazioni ministeriali e alle linee guida per la scuola secondaria

Primo biennio

Lo studente acquisirà la conoscenza delle principali trasformazioni geometriche (traslazioni, rotazioni, simmetrie, similitudini con particolare riguardo al teorema di Talete) e sarà in grado di riconoscere le principali proprietà invarianti.

1 Ministero della Istruzione, *Raccomandazioni per l'attuazione delle Indicazioni nazionali per i Piani di Studio Personali nella Scuola Primaria;* Allegati al *Decreto di attuazione del Progetto Nazionale di Sperimentazione* (D.M. 100 del 18 settembre 2002)

Un tema fondamentale di studio sarà il concetto di algoritmo e l'elaborazione di strategie di risoluzioni algoritmiche nel caso di problemi semplici e di facile modellizzazione [Nucleo: Elementi di informatica].

Descrizione dell'attività per gli insegnanti

- **Contesto**: caccia al tesoro.
- **Ordine di scuola**: primo biennio della scuola secondaria di II grado.
- **Materiale**: fogli bianchi e penne; schede preparate dagli organizzatori.
- **Prerequisiti e obiettivi:** l'attività non prevede conoscenze matematiche specifiche. Le competenze richieste, infatti, fanno parte di schemi mentali e comportamentali che uno studente attiva sia in contesti scolastici (nello specifico, a partire dalla scuola primaria e secondaria inferiore), sia in situazioni di vita quotidiana. Pertanto l'attività è indirizzata non solo alle menti più brillanti, ma a tutti gli studenti delle classi coinvolte, prevedendo la partecipazione nel lavoro di gruppo di tutti gli interessati, a prescindere dal livello scolastico dei singoli componenti.

  Nel contesto di tale attività, il fine è quello di favorire negli studenti la capacità di produrre, sostenere e confutare congetture, ricorrendo a controesempi basati sull'utilizzo efficace di negazioni e connettivi logici, ed eventualmente anche le leggi di De Morgan.
- **Descrizione attività e indicazioni metodologiche**: "L'Isola di Baal" è concepita come una caccia al tesoro *statica*, costituita da 6 schede. Con l'aiuto degli insegnanti, gli studenti, appartenenti a classi diverse, sono suddivisi in squadre eterogenee di 6/7 persone. Viene chiesto loro di nominare un portavoce del gruppo[2], addetto a consegnare agli organizzatori di volta in volta la risposta trovata di comune accordo con i restanti componenti, per poter procedere con le prove successive. Ogni gruppo si riunisce attorno ad un tavolo su cui trova fogli di lavoro, penne e la prima scheda introduttiva al gioco. Come vedremo in seguito e più in dettaglio, il primo foglio fornisce una contestualizzazione alle fasi della caccia al tesoro. Una volta che tutte le squadre hanno letto la storia, gli organizzatori distribuiscono ad ogni tavolo la scheda contenente la prima prova. Si procede con un lavoro con carta e penna in cui gli studenti devono scrivere i processi logici seguiti per risolvere i problemi contenuti nelle schede preparate dai docenti formatori. Durante l'attività i ragazzi di ogni gruppo sono portati a discutere tra di loro e trovare un accordo comune per consegnare la risposta corretta e procedere con i problemi successivi. Il portavoce scelto da ogni squadra sarà tenuto a consegnare la risposta, unitamente al ragionamento seguito dal gruppo. Vince la squadra che per prima consegna la risposta corretta all'ultima prova. La presenza di una vicenda e di un duplice obiettivo (trovare la risposta corretta e vincere il premio) costituiscono un motivante incentivo per tutti gli studenti coinvolti.
- **Tempo di svolgimento previsto**: 90 minuti.
- **Contenuti matematici:**
  - **Connettivi Logici:** sono coinvolti i principali connettivi logici, la congiunzione "e" (in simboli matematici "$\wedge$"), la disgiunzione "o" (in simboli matematici "$\vee$"), l'implicazione "se, allora" (in simboli matematici "$\rightarrow$"), la negazione "non" (in simboli matematici "$\neg$") e le *leggi di De Morgan*:

2 La scelta di nominare un portavoce si rivela essenziale fin dall'inizio: trattandosi di un gioco in cui anche il tempo può fare la differenza, avere un componente addetto a leggere ad alta voce e per tutti i compagni le schede di lavoro, permette di risparmiare tempo e coinvolgere tutti sin da subito.

$$\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$$
$$\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b,$$

dove "a" e "b" rappresentano due proposizioni (affermazioni) generiche.

- **Simmetria**: simmetrie centrali rispetto ad un punto di segmenti.
- **Quadrato magico:** una tabella quadrata nella quale la somma dei numeri presenti in ogni riga, colonna e in entrambe le diagonali, dia sempre lo stesso valore, denominato costante magica del quadrato.

Nota per gli insegnanti: sarà cura del docente, alla fine dell'attività, operare una sintesi sul lavoro, richiamando i problemi posti e proponendo la risoluzione di ciascuno di essi, prima fornendo l'approccio intuitivo e, poi, quello più rigoroso in cui interviene il linguaggio matematico. In particolare, si potranno introdurre i seguenti simboli

"e" = "$\wedge$", "o" = "$\vee$", "non" = "$\neg$", "se…allora…" = "se… $\rightarrow$",

oltre che le cosiddette *tabelle di verità*.

Si osservi che, nell'unico caso del problema di tipo geometrico, sarà sempre cura del docente cogliere l'occasione per fare un breve accenno alle trasformazioni geometriche del piano, a partire da quella osservata nel problema (simmetria rispetto ad un punto).

Nuclei coinvolti, conoscenze e abilità interessate

Abilità	**Conoscenze**	**Nuclei coinvolti (UMI, 2003)**	
		disciplinari	**trasversali**
- Riconoscere e usare propriamente locuzioni della lingua italiana con valenza logica ("se… allora", "per ogni", "esiste almeno un", ecc.). - Produrre congetture e sostenerle con ragionamenti coerenti e pertinenti. - Verificare una congettura in casi particolari, con consapevolezza della distinzione tra verifica e dimostrazione. - Confutare congetture prodotte, anche mediante il ricorso a controesempi. - Confrontare le proprie congetture con quelle prodotte da altri.	- Linguaggio naturale e linguaggio simbolico. Proposizioni e valori di verità. I connettivi.		Argomentare, congetturare, dimostrare

- Scegliere, adattare, utilizzare schematizzazioni matematiche (formule, grafici, figure geometriche, ecc.) di situazioni e fenomeni matematici e non (fenomeni delle scienze sperimentali, economici, demografici, dei giochi sia di strategia che di sorte ecc.) per affrontare problemi (aperti o meno; posti da altri o auto-posti). - Produrre una soluzione del problema attraverso una opportuna concatenazione delle azioni necessarie (formalizzazioni, calcoli, costruzioni geometriche, ecc.). - Comunicare in modo esauriente e comprensibile le strategie risolutive prodotte, discutendone l'efficacia e la validità, e confrontarle con eventuali altre strategie			Risolvere e porsi problemi
- Individuare proprietà invarianti per isometrie nel piano - Analizzare e risolvere semplici problemi mediante l'applicazione delle isometrie	- Le isometrie nel piano: traslazioni, rotazioni, simmetrie.	Spazio e Figure	

Schede per gli studenti

Scheda Introduttiva/Descrittiva (10/15 minuti): questa prima scheda narra la storia su cui si basa la caccia il tesoro. Essa costituisce un espediente per incuriosire i ragazzi, che vengono così calati in un contesto di fantasia nel quale le loro risposte trovano un significato.

L'ISOLA DI BAAL

Ho letto in qualche libro di filosofia che

«Il vero filosofo è la bambina di nove anni che stava guardando fuori dalla finestra e improvvisamente si rivolse alla madre e disse: "Mamma, c'è soltanto una cosa che non riesco a capire: perché mai esiste qualcosa?"».

Questo problema ha lasciato perplesso più di un filosofo: alcuni l'hanno considerato il problema fondamentale della filosofia. Lo si è posto in questa forma:

«Perché c'è qualche cosa invece di niente?».

Quando vi soffermate a pensarci, vi rendete conto che è veramente una domanda importante. In effetti, perché c'è qualcosa invece di niente? Ebbene, c'era una volta un filosofo che decise di fare della risoluzione di questo problema il principale scopo della sua vita. Prima lesse tutti i libri di filosofia, ma nessuno di essi poté fornirgli la vera spiegazione del perché c'è qualcosa invece di niente. Si rivolse allora alla teologia. Chiese a tutti i sacerdoti, rabbini, preti, vescovi, ed altre autorità religiose, ma nessuno di essi poté spiegargli in modo soddisfacente perché c'è qualcosa invece di niente. Infine si rivolse alla filosofia orientale: viaggiò per dodici anni in India e nel Tibet, interrogando molti guru, ma nessuno di essi conosceva la risposta. Quindi passò altri dodici anni in Cina e Giappone, interrogando vari eremiti Taoisti e maestri di Zen. Alla fine incontrò un saggio sul letto di morte che gli disse:

«No, figlio mio, io stesso non so perché c'è qualcosa invece di niente. L'unico luogo di questo pianeta in cui si conosca la risposta a questa domanda è l'isola di Baal. Uno dei grandi saggi del tempio di Baal conosce la vera risposta».

«E dov'è l'isola di Baal?», chiese il filosofo con ansia.

«Ah!», fu la risposta, *«Io non so neanche questo. In verità io non ho mai conosciuto qualcuno che abbia veramente trovato la strada per l'isola di Baal. Tutto ciò che so è la posizione di un certo arcipelago, non segnato sulle carte, e in un'isola di questo arcipelago si trova la carta e una serie completa di istruzioni per raggiungere l'isola di Baal. Io non so su quale isola dell'arcipelago si possa trovare la carta; tutto quel che so è che essa è in una di queste isole e che il nome dell'isola è 'Maya'. Però, tutte queste isole sono abitate esclusivamente da cavalieri che dicono sempre la verità e da furfanti che mentono sempre. Quindi è necessario essere molto furbi!».*

Questa fu la notizia più promettente che il filosofo avesse udito in ventiquattro anni! Ebbene, egli non ebbe difficoltà a trovare la strada per l'arcipelago, ed esplorò sistematicamente un'isola dopo l'altra, sperando di scoprire quale fosse l'isola di Maya.

Prima Scheda (20/25 minuti)

PRIMA FASE

La prima isola.

Sulla prima isola che esplorò, incontrò due indigeni A e B che fecero le seguenti affermazioni:

A: B è un cavaliere e questa è l'isola di Maya.

B: A è un furfante e questa è l'isola di Maya.

È questa l'isola di Maya?

La seconda isola.

Su quest'isola, due nativi A e B fecero le seguenti affermazioni:

A: Noi siamo entrambi furfanti e questa è l'isola di Maya.

B: È vero.

È questa l'isola di Maya?

La terza isola.

Su quest'isola A e B dissero:

A: Almeno uno di noi è un furfante e questa è l'isola di Maya.

B: è vero.

È questa l'isola di Maya?

La quarta isola.

Su quest'isola, due nativi A e B dissero:

A: Noi siamo entrambi furfanti, e questa è l'isola di Maya.

B: Almeno uno di noi è un furfante, e questa non è l'isola di Maya.

È questa l'isola di Maya?

La quinta isola.

Qui, due dei nativi A e B dissero:

A: Noi siamo entrambi furfanti e questa è l'isola di Maya.

B: Almeno uno di noi due è un cavaliere, e questa non è l'isola di Maya.

È questa l'isola di Maya?

La sesta isola.

Su quest'isola due nativi, A e B, fecero le seguenti affermazioni:

A: O B è un cavaliere o questa è l'isola di Maya.

B: O A è un furfante o questa è l'isola di Maya.

È questa l'isola di Maya?

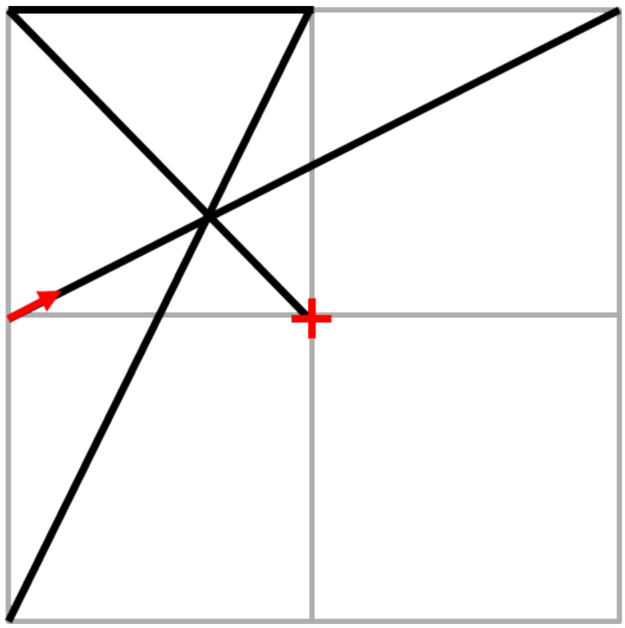
Utilizzando le informazioni fornite per ciascuna isola, i ragazzi devono individuare quale tra le sei è l'isola di Maya. La via più naturale risulta quella di procedere per esclusione. Basandosi sulle affermazioni di A e di B, le squadre cercano il caso in cui non vi è contraddizione tra i due nativi. Fin da questa prima fase, i ragazzi si trovano ad affrontare problemi logici, nei quali è richiesta una padronanza dei connettivi propri della lingua italiana, "o" / "e", delle negazioni con l'uso del "non" e delle locuzioni "o…o…" / "se…allora…".

Seconda Scheda (10/15 minuti)

SECONDA FASE

La carta per Baal

Il nostro filosofo trovò l'isola di Maya. Tuttavia, il compito di trovare la carta e le istruzioni per Baal non era così facile come aveva previsto. Dovette vedere il Grande Saggio di Maya che gli consegnò una carta. Il Grande Saggio gli disse che per poter conoscere il percorso per arrivare all'isola di Baal avrebbe dovuto fornirgli come risposta un numero.



Ecco le istruzioni per poter trovare il numero richiesto.

La croce centrale rappresenta il centro di simmetria O. Tracciando i segmenti simmetrici rispetto ad O, si ottiene un percorso che tocca tutti e 9 i vertici dei quadrati che compongono la figura. Il primo vertice è segnato da una freccia. Seguendo il percorso costruito, numera da 1 a 9 tutti i vertici raggiunti.

Osserva ora come hai disposto i numeri da 1 a 9. Noti una qualche relazione? Quale numero è coinvolto in questa relazione?

Una volta individuata l'isola di Maya, per superare la seconda fase è necessario fornire un numero. Questa prova è l'unica che si pone in un contesto di tipo geometrico e non prettamente logico. Nello specifico, per costruire la figura e porre correttamente le cifre da 1 a 9 sui vertici dei quadrati, sono richieste conoscenze geometriche di base, quali le simmetrie centrali; per capire la relazione tra i numeri inseriti, si torna ad un ragionamento di tipo logico-intuitivo.

Terza Scheda (15/20 minuti)

TERZA FASE

L'isola di Baal

Fra tutte le isole di cavalieri e furfanti, l'isola di Baal è certamente la più misteriosa e interessante. Quest'isola è abitata esclusivamente da esseri umani e da scimmie. Le scimmie sono alte come gli esseri umani e parlano altrettanto fluentemente. Ogni scimmia, come ogni umano, è un cavaliere o un furfante.

Proprio nel centro dell'isola vi è il tempio di Baal, uno dei templi più straordinari dell'intero universo. I grandi saggi sono metafisici, e nel Tempio Interno si può trovare un saggio che, si dice, conosca la risposta al mistero ultimo dell'universo: perché c'è qualcosa invece del nulla.

Coloro che aspirano alla conoscenza sacra devono riuscire a visitare il Tempio Interno, attorno al quale si trovano un Tempio Medio, protetto a sua volta da un Tempio Esterno. Per accedervi, è necessario superare le guardie incappucciate, che custodiscono l'ingresso di ciascun tempio. Ogni incappucciato può essere un umano o una scimmia, e anche un cavaliere o un furfante. A coloro che desiderano entrare, la guardia pronuncia una frase, dalla quale si deve dedurre esattamente di chi si tratta: se un cavaliere o un furfante, e se un umano o una scimmia.

Il nostro filosofo, ovviamente, decise di tentare le tre prove.

Alla porta del Tempio Esterno

L'incappucciato disse: «Io sono un furfante o una scimmia».

Che cos'era esattamente?

Alla porta del Tempio Medio

L'incappucciato disse: «Sono un furfante e una scimmia».

Che cos'era esattamente?

Alla porta del Tempio Interno

L'incappucciato disse: «Non sono scimmia e cavaliere insieme».

Che cos'era esattamente?

Con la terza prova, si torna a problemi per la cui risoluzione sono richiesti ragionamenti logici.

Rispetto alla prima scheda si inserisce ora un elemento di difficoltà: dalle informazioni dei personaggi non solo occorre individuare i furfanti e i cavalieri (e dunque capire chi dice la verità), ma anche stabilire se questi ultimi sono umani o scimmie.

Quarta scheda (10 minuti)

PROVA FINALE

Il filosofo superò queste tre prove, così gli fu concesso di entrare nel Tempio Interno. In questa stanza c'erano i due maggiori saggi dell'universo, seduti su due troni di diamante!

È possibile che almeno uno di essi sapesse la risposta alla Grande Domanda

«*Perché vi è qualcosa invece del nulla?* ».

Naturalmente, ognuno dei due saggi era o un cavaliere o un furfante (se fossero umani o scimmie non è rilevante). Così non si sapeva di ognuno se fosse un cavaliere o un furfante, o se conoscesse la risposta alla Grande Domanda. I due saggi fecero le seguenti affermazioni:

Primo Saggio: Io sono un furfante, e non so perché ci sia qualcosa invece del nulla.

Secondo Saggio: Io sono un cavaliere, e non so perché ci sia qualcosa invece del nulla.

Sapeva veramente uno dei saggi perché vi è qualcosa invece del nulla?

In questa fase si procede, come nella prima scheda, per contraddizione, al fine di individuare chi dei due personaggi dice la verità. Tuttavia, l'obiettivo è quello di rispondere alla domanda "*Sapeva veramente uno dei due saggi perché vi è qualcosa invece del nulla?*", in quanto questo permette di accedere alla prova finale. Quello che ora pare essere un dato insignificante, ovvero attribuire al primo e al secondo saggio la natura di cavaliere o furfante, risulterà informazione cruciale nella fase finale del gioco.

Ultima scheda (10 minuti)

LA RISPOSTA!

Ora, insieme al filosofo, voi state per scoprire la vera risposta alla Grande Domanda

«*Perché c'è qualcosa invece del nulla?*».

Ebbene, uno dei due saggi, che conosceva effettivamente la risposta alla Grande Domanda, quando il filosofo gli chiese: «*Perché c'è qualcosa invece del nulla?*», diede la seguente risposta: «*C'è qualcosa invece del nulla*».

Quale drastica conclusione segue da tutto ciò?

Il ragionamento utilizzato è ancora di tipo logico, anche se effettivamente tutto ciò che risulta cruciale ai fini della risoluzione è la risposta individuata durante la fase precedente. Infatti, in base alla natura del saggio, si può dedurre la conclusione della storia.

Soluzioni dei problemi della caccia al tesoro e schede per gli insegnanti

Prima scheda

Ricordando che i cavalieri dicono sempre la verità e i furfanti mentono sempre, ecco come si può procedere alla risoluzione dei vari quesiti proposti.

La prima isola.

Sulla prima isola che esplorò, incontrò due indigeni A e B che fecero le seguenti affermazioni:

A: B è un cavaliere e questa è l'isola di Maya.

B: A è un furfante e questa è l'isola di Maya.

È questa l'isola di Maya?

Supponiamo che A sia un cavaliere, allora B è un cavaliere e questa è l'isola di Maya. Quindi la prima parte dell'affermazione di B ("A è un furfante") deve essere vera, ma ciò contraddice l'ipotesi iniziale. Pertanto A deve essere un furfante.

Se A è un furfante, allora è falso che "B è un cavaliere e questa è l'isola di Maya". Ciò equivale a negare o la prima o la seconda parte dell'affermazione.

- Neghiamo la prima parte e supponiamo vera la seconda: B è un furfante e questa è l'isola di Maya. Dato che la prima parte dell'affermazione di B è vera ("A è un furfante"), essendo egli un furfante, deve mentire sulla seconda ("questa è l'isola di Maya"). Ma ciò porta ad una contraddizione perché questa è (per A) e non è (per B) l'isola di Maya. Dunque, l'unica possibilità è che questa non sia l'isola di Maya.
- Neghiamo la seconda parte e supponiamo vera la prima: B è un cavaliere e questa non è l'isola di Maya. Siccome B dice la verità, la seconda parte della sua affermazione contraddice

l'ipotesi che questa non sia l'isola di Maya. Pertanto, ritroviamo una contraddizione analoga alla precedente, perché questa è (per B) e non è (per A) l'isola di Maya. Anche in questo caso, si deduce che questa non è l'isola di Maya.

La seconda isola.

Su quest'isola, due nativi A e B fecero le seguenti affermazioni:

A: Noi siamo entrambi furfanti e questa è l'isola di Maya.

B: È vero.

È questa l'isola di Maya?

A non può essere un cavaliere perché, dicendo sempre la verità, non affermerebbe di essere un furfante.

Allora A è un furfante ed è falso che "Noi siamo entrambi furfanti e questa è l'isola di Maya".

- Neghiamo la prima parte dell'affermazione e supponiamo vera la seconda: uno tra A e B è cavaliere e questa è l'isola di Maya. Dato che A è un furfante, allora B è un cavaliere. Ma questo non è possibile in quanto B cavaliere concorderebbe con l'affermazione di A ("noi siamo entrambi furfanti"), dicendo di sé di essere un furfante. Ciò porta ad una contraddizione, quindi l'unica possibilità è che questa non sia l'isola di Maya.
- Neghiamo la seconda parte e supponiamo vera la prima: A e B sono entrambi furfanti e questa non è l'isola di Maya. Poiché B è un furfante, non è vero che si trova d'accordo con quanto afferma A. Essendo però vera la prima parte della proposizione di A ("noi siamo entrambi furfanti"), deve essere falsa la seconda. Pertanto, sia per A che per B questa non è l'isola di Maya.

La terza isola.

Su quest'isola A e B dissero:

A: Almeno uno di noi è un furfante e questa è l'isola di Maya.

B: è vero.

È questa l'isola di Maya?

Supponiamo A cavaliere. Dato che egli afferma che uno tra lui e B è un furfante, ne consegue che l'unica possibilità è che B sia un furfante. Allora non è vero che B si trova d'accordo con quanto A sostiene. Essendo, però, vera la prima parte della proposizione di A ("almeno uno di noi è un furfante"), deve essere falsa la seconda. E, quindi, questa non è l'isola di Maya.

Supponiamo ora A furfante. Allora è falso quanto egli dice: "almeno uno di noi è un furfante e questa è l'isola di Maya".

- Neghiamo la prima parte dell'affermazione e supponiamo vera la seconda: nessuno tra A e B è un furfante e questa è l'isola di Maya. Abbiamo già una contraddizione perché abbiamo assunto A furfante. Quindi è sbagliato supporre che questa sia l'isola di Maya.
- Neghiamo la seconda parte e supponiamo vera la prima: almeno uno tra A e B è un furfante e questa non è l'isola di Maya. In questa situazione non è rilevante la natura di B. Infatti, se B è un cavaliere allora, concordando egli con A, si arriverebbe all'assurdo in cui questa è (per B) e non è (per A) l'isola di Maya. Se B è un furfante, non è vero che concorda con A. Ma, essendo la prima parte dell'affermazione di A vera ("almeno uno dei due è un furfante"), deve essere falsa la seconda e quindi questa non è l'isola di Maya.

La quarta isola.

Su quest'isola, due nativi A e B dissero:

A: Noi siamo entrambi furfanti, e questa è l'isola di Maya.

B: Almeno uno di noi è un furfante, e questa non è l'isola di Maya.

È questa l'isola di Maya?

A non può essere un cavaliere, perché, come già osservato precedentemente (vedi seconda isola), non potrebbe dire di sé di essere un furfante.

A è un furfante, pertanto è falso quanto egli dice: "Noi siamo entrambi furfanti e questa è l'isola di Maya".

- Neghiamo la prima parte dell'affermazione e supponiamo vera la seconda: uno tra A e B è un cavaliere e questa è l'isola di Maya. Essendo A furfante, il cavaliere è B. Per quanto affermato da B, questa non è l'isola di Maya. Ma allora questa è (per B) e non è (per A) l'isola di Maya. Il che è una contraddizione.
- Neghiamo la seconda parte e supponiamo vera la prima: A e B sono entrambi furfanti e questa non è l'isola di Maya. Se B è un furfante, essendo vera la prima parte della sua affermazione, è falsa la seconda ("questa non è l'isola di Maya"). In questa situazione abbiamo che questa è (per B) e non è (per A) l'isola di Maya. Di nuovo si arriva ad una contraddizione.

La quinta isola.

Qui, due dei nativi A e B dissero:

A: Noi siamo entrambi furfanti e questa è l'isola di Maya.

B: Almeno uno di noi due è un cavaliere, e questa non è l'isola di Maya.

È questa l'isola di Maya?

A non può essere un cavaliere, perché, come già osservato precedentemente (vedi seconda e quarta isola), non potrebbe dire di sé di essere un furfante.

A è un furfante, pertanto è falso quanto egli dice: "Noi siamo entrambi furfanti e questa è l'isola di Maya".

- Neghiamo la prima parte dell'affermazione e supponiamo vera la seconda: uno tra A e B è un cavaliere e questa è l'isola di Maya. Essendo A furfante, il cavaliere è B. Per quanto affermato da B, questa non è l'isola di Maya. Ma allora questa è (per B) e non è (per A) l'isola di Maya. Il che è una contraddizione.
- Neghiamo la seconda parte e supponiamo vera la prima: A e B sono entrambi furfanti e questa non è l'isola di Maya. Se B è un furfante, non è rilevante la seconda parte della sua affermazione perché se è vera, allora questa non è l'isola di Maya sia per A che per B; se è falsa allora si arriva alla solita contraddizione ("è" e "non è").

La sesta isola.

Su quest'isola due nativi, A e B, fecero le seguenti affermazioni:

A: O B è un cavaliere o questa è l'isola di Maya.

B: O A è un furfante o questa è l'isola di Maya.

È questa l'isola di Maya?

Prima di entrare nei dettagli del ragionamento seguito, è opportuno far notare che, per come è formulato il quesito della "sesta isola", potrebbero nascere delle ambiguità. Infatti, entrambe le affermazioni di A e di B si potrebbero interpretare in due modi differenti. La prima possibilità sarebbe di intendere la "o" come un "vel", ovvero come una disgiunzione inclusiva. La seconda, invece, di intendere la "o" come un "aut", ovvero come una disgiunzione esclusiva. Nel contesto del gioco della caccia al tesoro, noi l'abbiamo interpretata come un "vel", pertanto entrambe le affermazioni potrebbero rileggersi nei seguenti termini:

A: almeno una delle due frasi seguenti è vera: B è un cavaliere, questa è l'isola di Maya.

B: almeno una delle due frasi seguenti è vera: A è un furfante, questa è l'isola di Maya.

Chiarita tale questione, in modo da evitare ogni tipo di dubbio, procediamo con la soluzione.

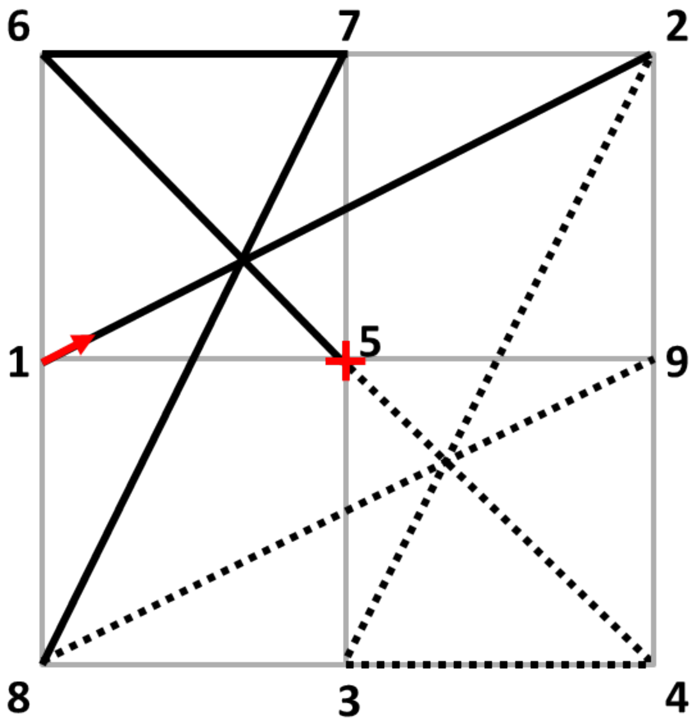
Supponiamo A furfante. Allora entrambe le alternative della sua proposizione sono false. Il che fa supporre B furfante. Ma se B è un furfante, allora entrambe le alternative della sua affermazione sono anch'esse false e, quindi, ne consegue che A è un cavaliere. Ma ciò contraddice l'ipotesi iniziale (A furfante).

Supponiamo allora A cavaliere. Ci sono tre possibilità da considerare relativamente alla sua affermazione ("O B è un cavaliere o questa è l'isola di Maya"): o è vera la prima alternativa, o è vera la seconda o sono vere entrambe. L'unico caso da verificare è il primo, in quanto, quando è vera la seconda parte della sua affermazione, ne consegue direttamente che questa è l'isola di Maya. Soffermiamoci, qundi, solo sul primo caso. Se B un cavaliere, dicendo egli sempre la verità, tra le due alternative della sua affermazione deve essere vera la seconda ("questa è l'isola di Maya"), in quanto la prima contraddice l'ipotesi "A cavaliere".

Come si osserva questo caso è l'unico in cui compare la disgiunzione e, pertanto, risulta un po' più complicato il ragionamento.Tuttavia l'analisi dettagliata di questa ultima isola non è, in realtà, necessaria. Si può giungere alla soluzione semplicemente procedendo per esclusione delle precedenti cinque isole.

Seconda scheda

Seguendo le istruzioni della scheda, si ottiene la seguente figura.



Si ottiene un quadrato magico. Sommando i numeri su una stessa riga, su una stessa colonna o su una stessa diagonale si ottiene sempre il medesimo risultato: 15.

Ad esempio, 8 + 3 + 4 = 15 (ultima riga); 6 + 1 + 8 = 15 (prima colonna); 6 + 5 + 4 = 15 (diagonale dal vertice in alto a sinistra al vertice in basso a destra).

Curiosità: Il persorso costruito mediante la simmetria centrale dei segmenti è uno dei più conosciuti metodi per costruire un quadrato magico n x n con i numeri da 1 a n^2, per n dispari. Tale metodo è noto con il nome "salto del cavallo". Si scrive 1 nella prima casella a sinistra della riga centrale. Per inserire i numeri successivi si procede così:

- se è libera, si riempe la casella posta a sinistra e nella riga superiore rispetto all'ultimo numero inserito (se si è nella prima riga, ci si sposta nell'n-esima riga; se si è nella prima colonna, ci si sposta nell'n-esima colonna);
- se tale casella non è libera, si riempe la casella che si trova a destra e sulla stessa riga dell'ultimo numero inserito.

1		

		2
1		

		2
1		
	3	

		2
1		
	3	4

		2
1	5	
	3	4

6		2
1	5	
	3	4

6	7	2
1	5	
	3	4

6	7	2
1	5	
8	3	4

6	7	2
1	5	9
8	3	4

Terza scheda

Alla porta del Tempio Esterno

L'incappucciato disse: «Io sono un furfante o una scimmia».

Che cos'era esattamente?

Supponiamo che l'incappucciato sia un furfante. Allora egli sarebbe sia un cavaliere che un umano. Ma ciò contraddice l'assunzione iniziale. Pertanto l'incappucciato deve essere un cavaliere. Siccome dice la verità, allora è una scimmia. È un cavaliere scimmia.

Alla porta del Tempio Medio

L'incappucciato disse: «Sono un furfante e una scimmia».

Che cos'era esattamente?

L'incappucciato non può essere un cavaliere perché non può dire di sé di essere un furfante (ricordiamoci che i cavalieri dicono sempre la verità). Allora è un furfante. Essendo la prima parte della sua affermazione vera, deve essere falsa la seconda. Pertanto l'incappucciato è un furfante ed è un umano.

Alla porta del Tempio Interno

L'incappucciato disse: «Non sono scimmia e cavaliere insieme».

Che cos'era esattamente?

Se l'incappucciato è un cavaliere allora deve essere un cavaliere umano, perché l'alternativa sarebbe furfante scimmia. Ma, per quanto affermato, egli non può dire di sè di essere un furfante. Supponiamo che l'incappucciato sia un furfante. Allora sarebbe vero che è scimmia e cavaliere insieme. Ma ciò contraddice l'ipotesi che sia un furfante. Pertanto l'incappucciato è un cavaliere umano.

Quarta scheda

Primo Saggio: Io sono un furfante, e non so perché ci sia qualcosa invece del nulla.

Secondo Saggio: Io sono un cavaliere, e non so perché ci sia qualcosa invece del nulla.

Sapeva veramente uno dei saggi perché vi è qualcosa invece del nulla?

Il primo saggio non può essere un cavaliere, per il solito discorso che non può dire di sé di essere un furfante. Dunque il primo saggio è un furfante. Siccome la prima parte della sua affermazione è vera, deve essere falsa la seconda, quindi egli sa perché c'è qualcosa invece del nulla.

Supponiamo che il secondo saggio sia un cavaliere. Allora non sa il perché. Se, invece, fosse un furfante, mentirebbe sulla prima parte e nulla si potrebbe dire sulla seconda. Ovvero può sapere o meno il perché esiste qualcosa invece del nulla.

La risposta alla domanda "Sapeva veramente uno dei saggi perché vi è qualcosa invece del nulla?" è affermativa. In particolare, il primo sa sicuramente qualcosa, mentre nulla si può affermare con certezza sul secondo. Osserviamo che, per la prova successiva, occorre tenere a mente, in entrambi i casi, il saggio che conosce la risposta è un furfante.

Ultima scheda

Poiché il saggio che conosce la risposta è un furfante, egli mente sulla risposta alla Grande Domanda. Pertanto, è falso che "C'è qualcosa invece del nulla", quindi la drastica conclusione è che non c'è nulla, e anche l'isola di Baal, così com'è stata descritta, in realtà logicamente non esiste.

Il fatto curioso è che fino all'ultima prova tutta la storia presentata, sebbene inventata, era logicamente possibile e solo con la risposta all'ultimo quesito ha fatto crollare tutto.

Approfondimento

In questo paragrafo riprendiamo i quesiti contenuti nella Prima Scheda e proponiamo un metodo di risoluzione più rigoroso da un punto di vista matematico rispetto a quello fornito precedentemente. Se prima il processo risolutivo era prevalentemente di tipo argomentativo, ora diventa più formale in quanto fa uso di schemi matematici fondati su precise regole logiche. Nello specifico, introduciamo le *tabelle di verità*. Per capirne il funzionamento, richiamiamo le tabelle di verità elementari.

Il connettivo "e"

Supponiamo che A e B siano due proposizioni e supponiamo che esse possano essere o vere (V) o false (F) [3]. Vogliamo unire queste due proposizioni utilizzando il connettivo logico "e", ovvero vogliamo analizzare la natura (vera o falsa) della proposizione descritta da "A e B". Chiaramente, essa risulterà vera o falsa in base al valore di verità dei singoli termini (A, B) che la compongono. La tabella di verità è costruita in modo da tener conto, nelle prime due colonne) di tutte le possibili combinazioni tra le proposizioni A e B. Nella terza colonna si assegna il valore di verità corrispondente a "A e B".

A	B	"A e B"
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Proviamo a leggere la tabella.

- Prima riga: "se A e B sono entrambe vere, allora l'affermazione 'A e B' risulta vera".
- Seconda e terza riga: "se una tra le affermazioni A e B è falsa, allora la proposizione 'A e B' risulta falsa".
- Quarta riga: "se le due proposizioni A e B sono entrambe false, allora l'affermazione 'A e B' non può essere vera".

Osserviamo che, nel caso del connettivo logico "e", l'affermazione "A e B" è vera solo quando le due proposizioni che la compongono sono contemporaneamente vere se prese singolarmente.

In teoria degli insiemi, il connettivo logico "e" equivale all'operazione di intersezione. Ovvero, se A e B sono due insiemi non vuoti, diciamo che un elemento x appartiene all'intersezione dei due (che si indica con $A \cap B$) se e solo se x sta sia in A sia in B.

Il connettivo "o"

Uniamo ora le due proposizioni A e B utilizzando il connettivo logico "o", ovvero analizziamo la natura (vera o falsa) della proposizione descritta da "A o B". Serviamoci di una tabella di verità, costruita in modo del tutto analogo alla precedente.

A	B	"A o B"
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

3 In molti testi per indicare i valori di verità, oltre alle lettere maiuscole V ed F, è possibile trovare anche le cifre 1 e 0.

Proviamo a leggere la tabella.

- Prima riga: "se A e B sono entrambe vere, allora l'affermazione 'A o B' risulta vera".
- Seconda e terza riga: "se una tra le affermazioni A e B è vera, allora la proposizione 'A o B' risulta ancora vera".
- Quarta riga: "se le due proposizioni A e B sono entrambe false, allora l'affermazione 'A o B' non può essere vera".

Osserviamo che, nel caso del connettivo logico "o", l'affermazione "A o B" è vera quando almeno una delle due proposizioni che la compongono è vera.

In teoria degli insiemi, il connettivo logico "o" equivale all'operazione di unione. Ovvero, se A e B sono due insiemi non vuoti, diciamo che un elemento x appartiene all'unione dei due (che si indica con $A \cup B$) se x sta in A o in B o in entrambi.

La negazione "non" e le leggi di De Morgan

Sia A una proposizione. Se A è vera la sua negazione ("non A") sarà chiaramente falsa. Viceversa, se A è falsa, la sua negazione è vera. Nel caso di proposizioni formate utilizzando i connettivi logici precedentemente introdotti, la negazione è regolata dalle cosiddette leggi di De Morgan:

non (A e B) = (non A) o (non B)

non (A o B) = (non A) e (non B).

L'implicazione "se … allora …"

Siano A e B due proposizioni che possono essere vere o false. Nell'implicazione "se A allora B" (che si indica con "$A \rightarrow B$"), la proposizione A è detta ipotesi, mentre B è detta tesi. Per determinare la natura (vera o falsa) dell'affermazione "$A \rightarrow B$", consideriamo la seguente tabella di verità:

A	B	"$A \rightarrow B$"
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Proviamo a leggere la tabella.

- Prima riga: "se l'ipotesi e la tesi sono entrambe vere, allora l'implicazione '$A \rightarrow B$' risulta anch'essa vera" (se partendo da ipotesi vere si ottiene una conclusione vera è naturale concludere che l'intera affermazione è vera).
- Seconda riga: "se l'ipotesi è vera ma la tesi è falsa, allora non è vero che A implica B, in quanto da ipotesi verificate si dedurrebbe un'affermazione falsa".
- Terza e quarta riga: "partendo da un'ipotesi falsa A, la proposizione '$A \rightarrow B$' risulta sempre vera, indipendentemente dal valore di verità della tesi B".

Utilizzando le tabelle di verità introdotte, riprendiamo ora il problema della ricerca dell'isola di Maya (Prima Scheda). In tale contesto, introduciamo le seguenti proposizioni:

A: "A è un cavaliere", nonA: "A è un furfante";

B: "B è un cavaliere", nonB: "B è un furfante";

M: "Questa è l'isola di Maya", nonM: "Questa non è l'isola di Maya".

Ora, isola per isola prendiamo in considerazione le affermazioni dei due indigeni A e B e costruiamo quattro implicazioni in base alla loro natura (cavaliere o furfante). Più precisamente, assumere A (o B) implica assumere vera la sua affermazione (perché i cavalieri dicono sempre la verità); mentre assumere nonA (o nonB) implica assumere falsa la sua affermazione (perché i furfanti mentono sempre). Otteniamo così quattro proposizioni i, ii, iii, iv, le quali risultano vere per costruzione: il fatto di sapere che essere devono essere vere a priori tornerà utile nella lettura della tabella di verità. Quest'ultima viene costruita per stabilire il valore di verità delle implicazioni i, ii, iii e iv, in base alla natura di A e B (cavalieri o furfanti) e all'ipotesi di verità su M (Maya o non Maya). Come noto a priori, gli unici casi plausibili, e che verranno quindi presi in considerazione, saranno quelli in cui tutte e quattro le affermazioni risulteranno vere contemporaneamente. Se nella tabella non si riscontrassero righe in cui i, ii, iii e iv risultano vere allo stesso tempo, non potremmo dire nulla sull'isola in cui ci troviamo (cioè dalle informazioni degli indigeni non potremmo concludere se quella è o non è l'isola di Maya). Tuttavia, il gioco è stato progettato in maniera tale da avere sempre almeno un riscontro nelle tabelle di verità. Pertanto, ogni volta che troveremo una riga (o anche più di una) con il simbolo di verità V per le colonne i, ii, iii, iv, andremo a cercare la colonna corrispondente ad M per leggerne la natura.

La prima isola.

Sulla prima isola che esplorò, incontrò due indigeni A e B che fecero le seguenti affermazioni:

A: B è un cavaliere e questa è l'isola di Maya.

B: A è un furfante e questa è l'isola di Maya.

È questa l'isola di Maya?

Le quattro implicazioni che formiamo a partire dalle affermazioni degli indigeni sono:

i) A → B e M

ii) nonA → non (B e M)

iii) B → (nonA) e M

iv) nonB → non [(nonA) e M]

Tabella di verità - Prima isola											
			1		**2**		**i**	**ii**	**iii**	**iv**	
A	B	M	BeM	non1	(nonA) e M	non2	A→1	nonA → non1	B→2	nonB → non2	
V	V	V	V	F	F	V	V	V	F	V	X
V	V	F	F	V	F	V	F	V	F	V	X
V	F	V	F	V	F	V	F	V	V	V	X
V	F	F	F	V	F	V	F	V	V	V	X
F	V	V	V	F	V	F	V	F	V	V	X
F	V	F	F	V	F	V	V	V	F	V	X
F	F	V	F	V	V	F	V	V	V	F	X
F	F	F	F	V	F	V	V	V	V	V	ok

Si riscontra un unico caso in cui le affermazioni i, ii, iii, iv sono contemporaneamente vere. Nelle prime tre colonne della tabella, a partire da sinistra, leggiamo: A, B, M false. Ciò significa che gli indigeni incontrati sono entrambi furfanti e che la prima isola non è Maya (infatti M falsa equivale a nonM). Osserviamo che la nostra conclusione è coerente con il fatto che i due indigeni sono furfanti, in quanto entrambi affermando "questa è l'isola di Maya" stanno mentendo.

La seconda isola.
Su quest'isola, due nativi A e B fecero le seguenti affermazioni:
A: Noi siamo entrambi furfanti e questa è l'isola di Maya.
B: È vero.
È questa l'isola di Maya?

Le quattro implicazioni che formiamo a partire dalle affermazioni degli indigeni sono:
i) A → (nonA e nonB) e M
ii) nonA → non [(nonA e nonB) e M]
iii) B → (nonA e nonB) e M
iv) nonB → non [(nonA e nonB) e M]

Tabella di verità - Seconda isola											
					1		**i**	**ii**	**iii**	**iv**	
A	B	M	nonA e nonB	AoB	(nonA e nonB) e M	non1	A→1	nonA → non1	B→1	nonB → non1	
V	V	V	F	V	F	V	F	V	F	V	X
V	V	F	F	V	F	V	F	V	F	V	X
V	F	V	F	V	F	V	F	V	V	V	X
V	F	F	F	V	F	V	F	V	V	V	X
F	V	V	F	V	F	V	V	V	F	V	X
F	V	F	F	V	F	V	V	V	F	V	X
F	F	V	V	F	V	F	V	F	V	F	X
F	F	F	V	F	F	V	V	V	V	V	ok

Si riscontra un unico caso in cui le affermazioni i, ii, iii, iv sono contemporaneamente vere. Nelle prime tre colonne della tabella, a partire da sinistra, leggiamo: A, B, M false. Ciò significa che gli indigeni incontrati sono entrambi furfanti e che la seconda isola non è Maya. Osserviamo che la nostra conclusione è coerente con il fatto che i due indigeni sono furfanti, in quanto entrambi affermando "questa è l'isola di Maya" stanno mentendo.

La terza isola.
Su quest'isola A e B dissero:
A: Almeno uno di noi è un furfante e questa è l'isola di Maya.
B: è vero.
È questa l'isola di Maya?

Le quattro implicazioni che formiamo a partire dalle affermazioni degli indigeni sono:
i) A → (nonA o nonB) e M
ii) nonA → non [(nonA o nonB) e M]
iii) B → (nonA o nonB) e M
iv) nonB → non [(nonA o nonB) e M]

Tabella di verità - Terza isola											
					1		**i**	**ii**	**iii**	**iv**	
A	B	M	nonA o nonB	AeB	(nonA o nonB) e M	non1	A→1	nonA → non1	B→1	nonB → non1	
V	V	V	F	V	F	V	F	V	F	V	X
V	V	F	F	V	F	V	F	V	F	V	X
V	F	V	V	F	V	F	V	V	V	F	X
V	F	F	V	F	F	V	F	V	V	V	X
F	V	V	V	F	V	F	V	F	V	V	X
F	V	F	V	F	F	V	V	V	F	V	X
F	F	V	V	F	V	F	V	F	V	F	X
F	F	F	V	F	F	V	V	V	V	V	ok

Si riscontra un unico caso in cui le affermazioni i, ii, iii, iv sono contemporaneamente vere. Nelle prime tre colonne della tabella, a partire da sinistra, leggiamo: A, B, M false. Ciò significa che gli indigenti incontrati sono entrambi furfanti e che la terza isola non è Maya. Osserviamo nuovamente che la nostra conclusione è coerente con il fatto che i due indigeni sono furfanti, in quanto entrambi affermando "questa è l'isola di Maya" stanno mentendo.

La quarta isola.
Su quest'isola, due nativi A e B dissero:
A: Noi siamo entrambi furfanti, e questa è l'isola di Maya.
B: Almeno uno di noi è un furfante, e questa non è l'isola di Maya.
È questa l'isola di Maya?

Le quattro implicazioni che formiamo a partire dalle affermazioni degli indigeni sono:

i) A → (nonA e nonB) e M

ii) nonA → non [(nonA e nonB) e M]

iii) B → (nonA o nonB) e nonM

iv) nonB → non [(nonA o nonB) e nonM]

Tabella di verità - Quarta isola													
					1		**2**		**i**	**ii**	**iii**	**iv**	
A	B	M	nonA e nonB	nonA o nonB	(nonA e nonB) e M	non1	(nonA o nonB) e nonM	non2	A→1	nonA → non1	B→2	nonB → non2	
V	V	V	F	F	F	V	F	V	F	V	F	V	X
V	V	F	F	F	F	V	F	V	F	V	F	V	X
V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	V	V	X
V	F	F	F	V	F	V	V	F	F	V	V	F	X
F	V	V	F	V	F	V	F	V	V	V	F	V	X
F	V	F	F	V	F	V	V	F	V	V	V	V	ok
F	F	V	V	V	V	F	F	V	V	F	V	V	X
F	F	F	V	V	F	V	V	F	V	V	V	F	X

Si riscontra un unico caso in cui le affermazioni i, ii, iii, iv sono contemporaneamente vere. Nelle prime tre colonne della tabella, a partire da sinistra, leggiamo: A, M false e B vera. Ciò significa che la quarta isola non è Maya, il primo indigeno è un furfante (e difatti mente quando dice che "questa è l'isola di Maya") e l'altro è un cavaliere (e difatti dice il vero sostenendo che "questa non è l'isola di Maya").

La quinta isola.
Qui, due dei nativi A e B dissero:
A: Noi siamo entrambi furfanti e questa è l'isola di Maya.
B: Almeno uno di noi due è un cavaliere, e questa non è l'isola di Maya.
È questa l'isola di Maya?

Le quattro implicazioni che formiamo a partire dalle affermazioni degli indigeni sono:

i) A → (nonA e nonB) e M

ii) nonA → non [(nonA e nonB) e M]

iii) B → (A o B) e nonM

iv) nonB → non [(A o B) e nonM]

Tabella di verità - Quinta isola													
					1		**2**		**i**	**ii**	**iii**	**iv**	
A	B	M	nonA e nonB	AoB	(nonA e nonB) e M	non1	(AoB) e nonM	non2	A→1	nonA → non1	B→2	nonB → non2	
V	V	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	X
V	V	F	F	V	F	V	V	F	F	V	V	V	X
V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	V	V	X
V	F	F	F	V	F	V	V	F	F	V	V	F	X
F	V	V	F	V	F	V	F	V	V	V	F	V	X
F	V	F	F	V	F	V	V	F	V	V	V	V	ok
F	F	V	V	F	V	F	F	V	V	F	V	V	X
F	F	F	V	F	F	V	F	V	V	V	V	V	ok

Si riscontrano in questa tabella due righe in cui le implicazioni i, ii, iii, iv risultano vere:

A, M false e B vera, ovvero gli indigeni incontrati sono rispettivamente un furfante e un cavaliere e non siamo sull'isola di Maya

A, B, M false, ovvero gli indigeni incontrati sono due furfanti e questa non è l'isola di Maya.

Osserviamo che il gioco è stato costruito in modo da non presentare contraddizioni nella stessa tabella di verità, ovvero in modo da non presentare nella colonna di M in un caso V e nell'altro F. Infatti, nonostante si trovino due righe con i, ii, iii, iv vere, il valore di verità di M è in entrambi casi lo stesso.

La sesta isola.

Su quest'isola due nativi, A e B, fecero le seguenti affermazioni:

A: O B è un cavaliere o questa è l'isola di Maya.

B: O A è un furfante o questa è l'isola di Maya.

È questa l'isola di Maya?

Le quattro implicazioni che formiamo a partire dalle affermazioni degli indigeni sono:

i) A → B o M

ii) nonA → non (B o M)

iii) B → nonA o M

iv) nonB → non [nonA o M]

Tabella di verità - Sesta isola											
			1		**2**		**i**	**ii**	**iii**	**iv**	
A	B	M	BoM	non1	nonA o M	non2	A→1	nonA → non1	B→2	nonB → non2	
V	V	V	V	F	V	F	V	V	V	V	ok
V	V	F	V	F	F	V	V	V	F	V	X
V	F	V	V	F	V	F	V	V	V	F	X
V	F	F	F	V	F	V	F	V	V	V	X
F	V	V	V	F	V	F	V	F	V	V	X
F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	V	X
F	F	V	V	F	V	F	V	F	V	F	X
F	F	F	F	V	V	F	V	V	V	F	X

Per la sesta isola, si presenta un unico caso in cui i, ii, iii, iv sono contemporaneamente vere. Come si legge dalle prime tre colonne, A, B ed M risultano vere. Quindi, A e B sono cavalieri e quest'ultima è l'isola di Maya. Osserviamo che la nostra conclusione è coerente con il fatto che i due indigeni sono cavalieri: il primo dice il vero infatti le alternative che sostiene sono entrambe vere ("B è un cavaliere", "questa è l'isola di Maya"); anche il secondo dice il vero infatti tra le due alternative che sostiene, la prima ("A è un furfante") è falsa, ma è vera la seconda ("questa è l'isola di Maya").

Uno sguardo alle gare svolte: strategie e difficoltà riscontrate

Dedichiamo questo paragrafo all'analisi delle gare che abbiamo svolto il 12/04/2013 presso il Liceo Volta di Torino, con la partecipazione del Liceo Galileo Ferraris, e il 15/04/2013 presso il Liceo Vito Scafidi di Sangano.

	Volta-Galfer	**Scafidi**
Numero squadre	9	7
Tempo impiegato	1 h	1h20'

La scelta di squadre eterogenee e appartenenti a classi diverse ha incoraggiato ciascun componente alla discussione di gruppo. In nessun team è stata riconosciuta l'autorità di un leader, si è preferito, piuttosto, designare un portavoce alla lettura delle schede e alla consegna delle risposte per velocizzare i tempi di gioco. I ragazzi, per la risoluzione dei problemi, hanno proposto strategie e metodi risolutivi collettivi senza ricorrere alla suddivisione dei compiti tra i vari membri. La modalità di lavoro impiegata, pertanto, è stata di tipo collaborativo.

Nelle discussioni relative alla prima scheda, terza scheda e prova finale, è prevalsa la tendenza a ragionare *per esclusione* e *per assurdo*. A titolo d'esempio riportiamo qui di seguito alcuni processi logici emersi durante il laboratorio[4].

Prima scheda

- Prima isola:
  a) *"Se A è un cavaliere dice la verità, e quindi B è un cavaliere che dice la verità, dunque A è un furfante…assurdo!"*
  b) *"Se A avesse ragione dovrebbe essere un cavaliere e B anche, ma B dice che A è un furfante perciò mentono entrambi sull'isola."*
  c) *"Prendendo come vera la risposta di A viene fuori che lui stesso è un furfante e che sta mentendo sull'isola."*
  d) *"Se A è cavaliere, allora B sta mentendo e non è l'Isola di Maya".*
- Seconda isola:
  a) *"Se A fosse cavaliere direbbe il vero e sarebbero entrambi furfanti…assurdo!"*
  b) *"se sono entrambi furfanti mentono e non è l'isola di Maya".*
- Terza isola:
  a) *"Se A fosse cavaliere direbbe che uno di loro è furfante ma allora direbbe il falso e sarebbe falso perché è vero"*
  b) *"Perché un cavaliere direbbe la verità e un furfante non risponderebbe è vero".*
- Quarta isola:
  a) *"Se A è cavaliere direbbe che sono entrambi furfanti"*
  b) *"Il secondo è cavaliere perché dice la verità e contraddice il primo".*
- Quinta isola:
  a) *"Se B fosse cavaliere, A sarebbe furfante e non sarebbe l'isola di Maya"*
  b) *"A è un furfante e B è un cavaliere".*
- Sesta isola:
  a) *"Per esclusione…"*
  b) *"Poiché nessuna delle precedenti è l'isola di Maya, questa deve esserlo per forza".*

Terza scheda

- Alla porta del tempio esterno:
  a) "*Un furfante non direbbe di esserlo, quindi è un cavaliere che dicendo sempre la verità non può essere un furfante ma solo una scimmia."*
  b) *"Se fosse un furfante non direbbe la verità, quindi è un cavaliere e di conseguenza scimmia."*
  c) *"Un furfante non può dire di essere un furfante, quindi per essere cavaliere deve dire la verità, perciò scimmia cavaliere"*
  d) *"Non può essere un furfante perché dice la verità, è un cavaliere che dice la verità, quindi è scimmia"*

4 Abbiamo ritenuto significativo trascrivere esattamente le parole dei ragazzi così come sono state pronunciate. Le trascrizioni riportate sono estratte dalle discussioni di gruppi differenti e non sono da intendersi come un dialogo tra studenti dello stesso gruppo di lavoro.

e) *"I furfanti non dicono la verità, quindi non possono dire di essere furfanti, quindi è cavaliere scimmia".*

- Alla porta del tempio medio:
  a) *"Un cavaliere non mente, dunque è furfante e mente, perciò è umano"*
  b) *"Non può essere un cavaliere perché dice sempre la verità, essendo un furfante non può essere una scimmia"*
  c) *"Se fosse un cavaliere non potrebbe dire di essere un furfante però il furfante deve mentire su qualcosa allora mente sul fatto di essere una scimmia".*
- Alla porta del tempio interno:
  a) *"Dice la verità sul fatto che è un cavaliere, dunque è un cavaliere umano"*
  b) *"Dice la verità perché è un cavaliere ma non è scimmia"*
  c) *"Se fosse furfante mentirebbe su entrambe le affermazioni, ma se fosse cavaliere direbbe la verità, quindi è umano cavaliere".*

Prova finale

a) *"…è il primo saggio poiché, essendo un furfante, mente sul fatto di non sapere la risposta al quesito, e dunque ne è a conoscenza"*

b) *" Se il primo saggio è furfante vuol dire che mente, perciò sa tutto".*

La seconda fase ha riguardato la trattazione di un problema di tipo geometrico e non più di tipo logico. I ragazzi, che avevano ormai interiorizzato un preciso metodo di risoluzione svolgendo i problemi della prima scheda, si sono ritrovati spiazzati dal doverne cercare uno nuovo. In particolare, come vedremo, è stato necessario l'intervento degli organizzatori per superare le difficoltà incontrate. I ragazzi, per giungere alla soluzione, hanno messo in campo espedienti originali, come piegare il foglio o ripassare il disegno in controluce, non avendo ben chiaro come procedere per rappresentare i segmenti simmetrici rispetto ad un punto.

Per quanto riguarda l'ultima scheda, "La risposta", tutte le squadre hanno argomentato allo stesso modo. Su suggerimento degli organizzatori, i partecipanti hanno dovuto tener conto della scheda precedente per raggiungere una conclusione e giustificarla. Riportiamo, come prima, qualche frase ripresa durante la discussione:

a) *"Il saggio è un furfante, quindi non c'è nulla"*

b) *"Noi sappiamo dalla risposta prima che è un furfante, e quindi la risposta è l'opposto di quanto afferma"*

c) *"Se il saggio è un furfante, come si sa, dalla sua affermazione capiamo che non c'è nulla".*

Nello svolgimento della gara non sono state riscontrate particolari difficoltà, a parte in due fasi isolate e ben definite del gioco. Alla lettura della prima scheda e di fronte ai primi problemi è seguito un momento di perplessità dovuto alla richiesta di trattare questioni di natura logica. La formulazione delle prove (coppie di affermazioni di cui giudicare il valore di verità) è parsa complessa ai ragazzi che, però, hanno presto acquisito una maggior sicurezza. Questo è avvenuto non appena si sono accorti di poter fare affidamento a ragionamenti propri della vita quotidiana e non prettamente matematici. Il secondo momento d'incertezza si è verificato con il problema geometrico contenuto nella seconda scheda. Tutte le squadre hanno commesso gli stessi errori di fronte sia alla richiesta di tracciare segmenti simmetrici rispetto a un punto, sia nel numerare i vertici "toccati" dal percorso tracciato. Lo sbaglio comune è stato quello di disegnare i segmenti simmetrici rispetto all'asse verticale invece che rispetto al punto, come da richiesta. Probabilmente ciò è dovuto a una maggiore familiarità con la simmetria assiale, rispetto a quella centrale. Inoltre, una volta completato il disegno, quasi tutti i gruppi hanno tralasciato di collocare il numero 5 nel punto centrale della figura, non considerandolo come vertice. Tuttavia, su suggerimento degli organizzatori, i ragazzi hanno trovato l'errore, correggendo la disposizione dei numeri e giungendo dunque alla soluzione del quiz.

Nel complesso riteniamo che gli obiettivi previsti dal **PLS** siano stati raggiunti nel corso di questo laboratorio, sia per il coinvolgimento riscontrato tra i ragazzi, sia per le metodologie sviluppate. Gli studenti hanno perfezionato le loro capacità di analisi di testi in linguaggio naturale ed hanno messo in gioco le loro abilità nell'utilizzare propriamente le locuzioni della lingua italiana con valenza logica. Tramite il confronto con gli altri membri del gruppo, i ragazzi sono stati capaci di individuare eventuali errori di ragionamento, producendo le congetture corrette per determinare la soluzione finale. In nessun team si è verificata la predominanza di una sola figura a cui far riferimento e da cui aspettarsi la soluzione. Tutti hanno mostrato grande entusiasmo e partecipazione, vivendo il laboratorio come un momento di gioco e, allo stesso tempo, come un'occasione per fare matematica mettendo a disposizione le proprie conoscenze, senza timore della solita valutazione.

Figura 1 - Gruppo di studenti al lavoro

Figura 2 - Squadra di studenti

CAPITOLO 2

Le attività proposte: "Il Frutteto"

Introduzione

“Il frutteto”[1] è un gioco per bambini in età prescolare. Si gioca su un piano sul quale sono disegnati quattro alberi da frutto e un corvo. Oltre al piano, compongono il gioco le miniature in legno di pere, mele, prugne e ciliegie (10 per ciascun tipo), 9 tessere che compongono il disegno di un corvo uguale a quello rappresentato sul piano di gioco, 4 cestini e 1 dado. Sulle facce del dado sono rappresentati i 4 colori corrispondenti ai tipi di frutto, un cestino e un corvo. I bambini giocano insieme contro il corvo e vincono se riescono a raccogliere tutti i frutti prima che il pennuto arrivi a mangiarseli. Ciascuno dei giocatori tira a turno il dado: se compare uno dei colori, il giocatore raccoglie un frutto del tipo corrispondente, se non ve ne sono più, il turno passa al giocatore successivo. Se compare il cestino, il giocatore può raccogliere due frutti a sua scelta dall’albero che preferisce o anche da due alberi diversi. Se compare il corvo, una delle nove tessere va a comporre il disegno del corvo sul piano da gioco. I giocatori vincono se riescono a raccogliere tutti i frutti prima che le nove tessere abbiano composto il disegno del corvo.

Il gioco è semplice, ma meno semplice è rispondere a queste due domande: qual è la probabilità che i bambini siano i vincitori? Esiste una strategia migliore delle altre?

Il fine dell’attività è condurre i ragazzi a rispondere a queste domande.

Riferimenti alle indicazioni ministeriali e alle linee guida per la scuola secondaria

Al termine del percorso del liceo scientifico lo studente conoscerà i concetti e i metodi elementari della matematica, sia interni alla disciplina in se considerata, sia rilevanti per la descrizione e la previsione di fenomeni, in particolare del mondo fisico. Di qui i gruppi di concetti e metodi che saranno obiettivo dello studio:

- la conoscenza elementare di alcuni sviluppi della matematica moderna, in particolare degli elementi del calcolo delle probabilità e dell’analisi statistica;
- il concetto di modello matematico e un’idea chiara della differenza tra la visione della matematizzazione caratteristica della fisica classica (corrispondenza univoca tra matematica e natura) e quello della modellistica (possibilità di rappresentare la stessa classe di fenomeni mediante differenti approcci);
- costruzione e analisi di semplici modelli matematici di classi di fenomeni, anche utilizzando strumenti informatici per la descrizione e il calcolo;

Primo biennio:

Lo studente sarà in grado di rappresentare e analizzare in diversi modi (anche utilizzando strumenti informatici) un insieme di dati, scegliendo le rappresentazioni più idonee.

1 Il frutteto – Obst-garten - HABA game n. 4170 http://www.haba.de/haba/produktAnsicht.htm?c=PC_AK_17

Lo studio sarà svolto il più possibile in collegamento con le altre discipline anche in ambiti entro cui i dati siano raccolti direttamente dagli studenti.

Egli apprenderà la nozione di probabilità, con esempi tratti da contesti classici e con l'introduzione di nozioni di statistica.

Sarà approfondito in modo rigoroso il concetto di modello matematico, distinguendone la specificità concettuale e metodica rispetto all'approccio della fisica classica.

Secondo biennio:

Studierà la probabilità condizionata e composta, la formula di Bayes e le sue applicazioni, nonché gli elementi di base del calcolo combinatorio.

In relazione con le nuove conoscenze acquisite approfondirà il concetto di modello matematico.

Descrizione dell'attività per gli insegnanti

- **Contesto**: modellizzazione matematica di un gioco da tavolo per bambini.
- **Ordine di scuola**: secondo biennio della scuola secondaria di II grado.
- **Materiale:** gioco "Il frutteto", fogli bianchi e penne; schede preparate dagli organizzatori.
- **Prerequisiti e obiettivi:** l'attività si colloca al primo o secondo anno del secondo biennio. Non sono necessari prerequisiti disciplinari specifici, l'intuito e la guida dell'insegnante sono sufficienti a condurre i ragazzi alla soluzione. Le nozioni di probabilità condizionata, eventi indipendenti e coefficiente binomiale, tuttavia, possono aiutare per una lettura più approfondita del risultato (il gioco può anche essere utilizzato come motivazione per introdurli).

  Il fine dell'attività è mostrare ai ragazzi come a partire da un problema concreto, un gioco, si possa elaborarne un modello astratto, calcolabile, e da esso si possano trarre conclusioni sulle sue proprietà (Con quale probabilità si vince? Qual è la strategia migliore?).
- **Descrizione attività e indicazioni metodologiche:** L'attività è proposta nella forma di una gara-gioco della durata di un'ora, il cui svolgimento è schematizzato come segue:
  1. I ragazzi vengono suddivisi in piccole squadre (5/6 per gruppo) il più possibile eterogenee (pochi minuti)
  2. Si spiegano le regole del gioco e si invitano le squadre ad iniziare una partita e giocare per qualche minuto (non oltre 7-8).
  3. Si propongono ai ragazzi in sequenza le schede (vedere più avanti *Schede per gli studenti*). Dovranno dare risposta (anche parziale) ad ogni scheda per avere la scheda successiva. Vincerà la squadra le cui risposte verranno globalmente valutate dagli insegnanti come migliori (30-40 minuti).
  4. Si conclude spiegando ai partecipanti quale sia la soluzione corretta e commentando gli errori che sono stati commessi (si veda la scheda per l'insegnante) (10-15 minuti).
  5. (facoltativo e da fare in un secondo momento) La soluzione del gioco può essere spiegata con vari livelli di generalità (si veda la scheda per l'insegnante). Per esempio può essere una buona motivazione per introdurre i coefficienti binomiali e/o la nozione di probabilità condizionata.

  Le metodologie didattiche utilizzate sono: lavoro in piccoli gruppi, insegnamento per problemi, discussione matematica.
- **Tempo di svolgimento previsto**: 60 minuti.

- **Contenuti matematici:** L'obiettivo principale non è quello di introdurre o sfruttare contenuti matematici specifici, ma di vedere come la formulazione matematica rigorosa può essere una guida per la soluzione di un problema concreto. Se l'insegnante lo desidera, tuttavia, l'attività può anche essere utilizzata per motivare i ragazzi allo studio del calcolo delle probabilità e del calcolo combinatorio.

Nuclei coinvolti, conoscenze e abilità interessate

Abilità	Conoscenze	Nuclei coinvolti (UMI, 2003)	
		disciplinari	**trasversali**
- Scegliere, adattare, utilizzare schematizzazioni matematiche (formule, grafici, figure geometriche, ecc.) di situazioni e fenomeni matematici e non per affrontare problemi. - Produrre una soluzione del problema attraverso una opportuna concatenazione delle azioni necessarie - Comunicare in modo esauriente e comprensibile le strategie risolutive prodotte, discutendone l'efficacia e la validità, e confrontarle con eventuali altre strategie.			Risolvere e porsi problemi
- Costruire lo spazio degli eventi in casi semplici e determinarne la cardinalità. - Valutare la probabilità in diversi contesti problematici. - Distinguere tra eventi indipendenti e non.	- Eventi e operazioni con gli eventi. Eventi incompatibili; eventi esaustivi. L'evento certo e l'evento impossibile. Significato della probabilità e sue valutazioni. - Probabilità condizionata, probabilità composta; probabilità totale. - Concetto e significato di modello.	Dati e previsioni	

Schede per gli studenti

Ai ragazzi vengono distribuite 5 schede in totale: la prima è una introduzione al gioco e alla gara e non è numerata. La Scheda 1 e la Scheda 2 sono composte da due sotto-schede A e B. Con le sotto-schede A si propone ai ragazzi di ragionare da soli in maniera "istintiva". Le sotto-schede B invece propongono un ragionamento guidato che mira a rendere più semplice il compito anche ai gruppi che non avessero avuto idee autonome per la parte precedente.

IL FRUTTETO

La scheda introduttiva

Le regole del gioco:

Il frutteto è un gioco per bambini. Si gioca su un piano sul quale sono disegnati 4 alberi da frutto e un corvo.

Oltre al piano fanno parte del gioco:

- 40 miniature in legno di frutti: 10 pere, 10 mele, 10 prugne e 10 ciliegie
- 9 tessere che compongono il disegno di un corvo uguale a quello rappresentato sul piano di gioco
- 1 dado costituito da 4 facce colorate, 1 faccia col cestino e 1 faccia col corvo

I giocatori giocano insieme contro il corvo e vincono se riescono a raccogliere tutti i frutti prima che il corvo arrivi a mangiarseli. Ciascuno dei giocatori tira a turno il dado. Se compare il colore di uno dei frutti il giocatore ne raccoglie uno di quel tipo. Se non ce ne sono più, il turno passa al giocatore successivo. Se compare il cestino, il giocatore può raccogliere due frutti a sua scelta dall'albero che preferisce o anche da due alberi diversi. Se compare il corvo si aggiunge al piano di gioco una delle 9 tessere che ne compongono la figura. I giocatori vincono se riescono a raccogliere tutti i frutti prima che le 9 tessere abbiano formato il disegno.

IL NOSTRO PROBLEMA:

Giovanni ha giocato al Gioco del Frutteto con i suoi figli e su 5 partite ne ha vinte solo 2. Si è chiesto: "È davvero così difficile vincere a questo gioco? Qual è la probabilità di vincere?". Questo tipo di domande è all'ordine del giorno per chi si occupa di inventare nuovi giochi (immaginatevi i pianti se non fosse ben bilanciato!). Ma come si fa a calcolare questa probabilità?

Scheda 1A

Tentate di fare uno "schema" (una rappresentazione grafica/numerica/alfabetica) che permetta di descrivere i possibili esiti di ogni passo della partita e il loro succedersi nel tempo.

All'interno di questo schema deve essere possibile (almeno in teoria) descrivere quali sono le successioni di eventi che conducono alla vittoria dei bambini e quali sono quelle che conducono alla vittoria del corvo.

Scheda 1B

Come avrete sperimentato, costruire questo "schema" è molto più complicato del previsto, infatti:

1.1) Come si fa a descrivere cosa succede quando l'esito del lancio è un cestino?

1.2) Anche tralasciando il cestino (ovvero, quando esce il cestino non consideriamo valido il lancio e ritiriamo il dado), quanti sono i possibili esiti dopo due lanci di dado? Dopo tre sarebbero molti di più? Quanti?

1.3) Quando un tipo di frutto finisce la descrizione degli esiti possibili cambia un po'. Come si potrebbe rappresentare?

1.4) Qual è, nel nostro schema, la condizione perché i bambini vincano?

Scheda 2A

Al crescere del numero di lanci la complessità aumenta così tanto che presto nessun foglio potrebbe contenere il nostro schema. Per poter fare dei calcoli, è necessario formulare una versione semplificata del gioco. Come si potrebbe fare? Proponete delle strade.

Scheda 2B

2.1) Gli esiti del gioco completo sono in parte casuali e in parte frutto della strategia dei giocatori. Qual è l'unico elemento di strategia presente nel gioco?

2.2) Secondo voi, c'è una strategia migliore delle altre?

2.3) L'obiettivo finale sarà di calcolare la probabilità che vincano i bambini. Visto che alle scelte dei giocatori non si può attribuire una probabilità (ciascun giocatore fa delle scelte con criteri propri), è necessario o fissare una strategia oppure eliminare il cestino (questa sarà la nostra scelta). Ai fini della gara questa non è una domanda.

2.4) Inizialmente, possiamo introdurre una semplificazione drastica: c'è un solo grande albero su cui sono appesi 2 frutti e ci sono 3 tessere del corvo. Si gioca con una moneta invece che col dado, se esce Testa (T) si raccoglie un frutto, se esce Croce (C) si aggiunge una tessera al disegno del corvo. Si ridiscuta lo schema iniziale, indicando tutti i possibili esiti della partita.

2.5) Si assuma che la moneta sia equa, ossia che testa e croce abbiano la stessa probabilità pari a 1/2. Calcolare con quale probabilità si manifesta ciascuno degli esiti.

2.6) Qual è la probabilità che vincano i bambini?

Scheda per l'insegnante e soluzione

In estrema sintesi lo scopo del gioco è rispondere alle seguenti due domande, in particolare dettaglio alla seconda:

- Esiste una strategia migliore delle altre?
- Qual è la probabilità che i bambini vincano il gioco?

La risposta diretta non è semplice, tuttavia i ragazzi possono essere guidati attraverso diversi obiettivi intermedi a capire con quale ragionamento è possibile trovare una soluzione.

Il procedimento che vogliamo far loro sperimentare è lo stesso che ogni "matematico" segue quando cerca di formulare un modello di un fenomeno reale ed è composto dai seguenti passi:

1) Si formalizza il problema per renderlo "calcolabile".
2) Si valuta il grado di difficoltà e se il problema si rivela troppo complicato per una soluzione "diretta", si tenta di semplificarlo in modo che si possano fare dei conti.
3) Si risolve il "problema semplificato".
4) Si cerca di restituire gradualmente la complessità originaria al problema.
5) Se la difficoltà è data solamente dalla lunghezza di calcolo, si può ricorrere all'ausilio di un calcolatore (a questa parte non arriveremo, ma è bene far presente ai ragazzi che sarebbe un modo naturale di procedere oltre a quello che riusciamo a mostrare con calcoli elementari).

Un buon modo di schematizzare la possibile evoluzione del gioco è quello di introdurre un diagramma ad albero (Figura 1).

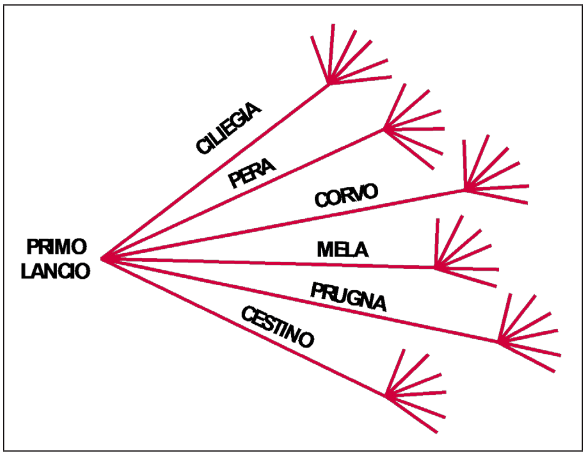


Figura 1 – Diagramma ad albero che schematizza l'evoluzione del gioco

Ad ogni lancio di dado corrispondono 6 diversi esiti e dopo n lanci di dado gli esiti possibili sono 6^n. Già dopo tre lanci disegnare l'albero su un foglio diventa difficile ed è davvero arduo fare dei calcoli senza l'ausilio di un computer.

È necessario dunque introdurre delle semplificazioni se si vuole avere un problema trattabile.

In prima battuta osserviamo che il gioco ha un solo elemento in cui può incidere la strategia: tra i possibili esiti del lancio di dado c'è il cestino che consente ai bambini di raccogliere due frutti scegliendo da quale/i albero raccoglierli. Questo elemento di strategia non può essere modellato in termini probabilistici, dunque per calcolare la probabilità di vincere è necessario fissare una strategia o eliminare il cestino.

Una prima analisi di questo gioco può dunque consistere nel domandarsi quale sia la strategia migliore. La risposta corretta è la seguente: è meglio scegliere due frutti dall'albero più carico. Una dimostrazione formalmente corretta e completa di questo fatto è al di là degli scopi di questa attività, ma una buona intuizione si ricava in questa maniera: fintanto che ci sono frutti su tutti gli alberi, delle sei facce del dado cinque conducono ad esiti "favorevoli" ai bambini. Quando invece un albero è esaurito, il colore corrispondente è come se non fosse più sul dado: se infatti viene selezionato, il dado viene tirato nuovamente senza che succeda nulla. Gli esiti favorevoli si sono dunque ridotti a quattro. È pertanto utile ritardare il più possibile il momento in cui uno degli alberi resta senza frutti.

Pur avendo compreso quale sia la strategia migliore, facciamo la scelta che renderà più facile calcolare la probabilità di vittoria: eliminiamo il cestino dal gioco. Per l'insegnante che desiderasse una dimostrazione rigorosa della ottimalità della strategia o il calcolo della probabilità di vittoria a strategia fissata per diverse strategie, rimandiamo ai due articoli di P. J. Campbell (2002, 2007). Uno degli autori[2] è disponibile a fornire ulteriori dettagli sul contenuto di questi articoli agli insegnanti interessati.

Una prima versione semplificata del gioco è quella senza cestino con un dado sul quale ci siano solo 5 facce, di cui 4 colorate con i colori dei frutti e 1 col corvo (dal punto di vista pratico equivale a giocare col dado normale e ritirare nel caso in cui compaia il cestino). In questa maniera il gioco è puramente probabilistico ma resta il problema della dimensione.

Per risolverlo introduciamo una nuova semplificazione, questa volta radicale: nel gioco c'è un solo albero su cui giacciono N=2 frutti e il puzzle del corvo è formato da M=3 tessere. I bambini tirano una moneta e se esce "testa" (T) raccolgono un frutto, se esce "croce" (C) dispongono sul tavolo una tessera del corvo. Il diagramma ad albero è ora semplificato e osservando che ad ogni lancio di dado si ha ugual probabilità di avere T o C si può facilmente descrivere tutti i possibili esiti, distinguerli tra vincenti (verdi) e perdenti (rossi) e calcolarne la probabilità (Figura 2).

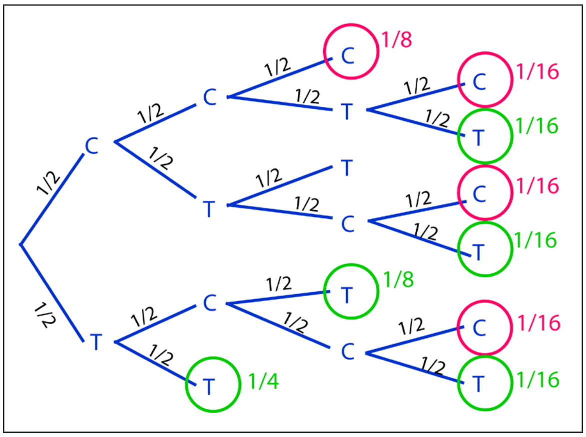


Figura 2 – Descrizione dei possibili esiti e relativa probabilità

2 enrico.bibbona@unito.it, https://sites.google.com/site/enricobibbona/

A nostro parere la giustificazione del fatto che nel passare da un ramo al successivo le probabilità si moltiplichino non deve essere necessariamente desunta da regole generali: si può ricorrere al fatto intuitivo che dopo due passi gli eventi possibili (equiprobabili) sono 4 e dunque la moltiplicazione dà l'esito corretto. Alla fine le probabilità in verde vanno sommate e anche questo è piuttosto intuivo (la probabilità di due eventi alternativi si somma). Semmai in un secondo momento, al di fuori della gara si potrebbe usare il diagramma ad albero per illustrare la nozione di probabilità condizionata.

La probabilità di vittoria nel caso semplificato è stata calcolata, ma se si vuole restituire un po' di generalità è bene concentrarsi nuovamente sullo schema e approfondire ulteriormente. Ad esempio possiamo chiederci cosa succede se la moneta non è equa, cioè se la probabilità che esca "testa" è $P(T)=p$ mentre la probabilità di "croce" è $q=1-p$?

Il diagramma diventa quello di Figura 3.

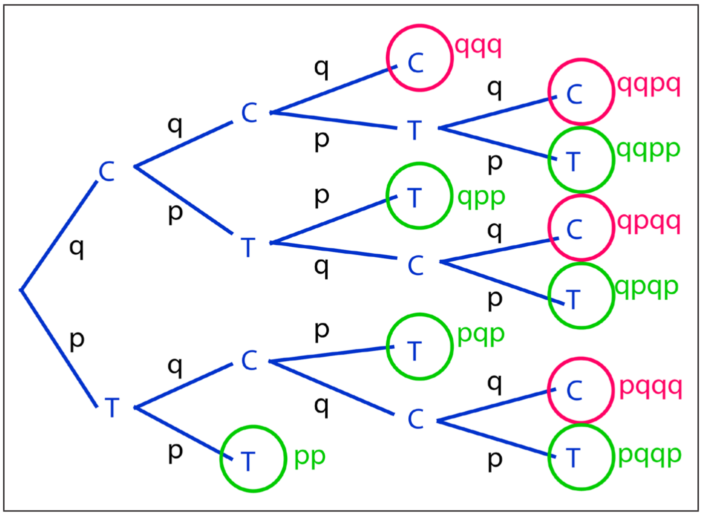


Figura 3 – Descrzione dei possibili esiti e relativa probabilita nel caso di moneta non equa

Gli esiti vincenti finiscono con una T all'ultimo lancio e prima devono avere un'altra T e possono contenere non più di due C. Il numero minimo di lanci perché il gioco si concluda è 2, il massimo 2+(3-1)=4.

C'è un solo esito conclusivo ottenibile in due lanci (TT, vincente), mentre con 3 lanci ci sono due esiti vincenti che corrispondono ai diversi ordini con cui si possono mettere una T e una C prima della T finale. Gli esiti vincenti che comportano quattro lanci sono tre, che corrispondono ai tre modi possibili di mettere 2 C e 1 T prima della T finale.

La probabilità di vittoria sarà dunque pari a $pp + 2qpp + 3qqpp = p^2(1 + 2q + 3q^2)$.

Se ora consideriamo una generalizzazione in cui c'è ancora un solo albero su cui giacciono N frutti e un puzzle del corvo con M tessere, si intuisce facilmente che il numero minimo di eventi per ottenere la vittoria è N, mentre e il massimo è dato da N+M-1.

Si ottiene una vittoria con N lanci della moneta solo nel caso in cui presentino tutti una T. Si vince in N+1 lanci se l'ultimo lancio è una T e i primi N contengono N-1 T e una sola C (e abbiamo N esiti di questo tipo).

In generale il numero di parole di lunghezza fissata L aventi X lettere T e L-X lettere C è dato dal coefficiente binomiale $\binom{L}{X}$, quindi la probabilità di vittoria sarà data dalla seguente formula:

$$p^N + Np^N q + \binom{N+1}{2} p^N q^2 + \cdots + \binom{N+M-2}{M-1} p^N q^{M-1} =$$
$$= p^N \left(1 + \mathrm{Nq} + \binom{N+1}{2} q^2 + \cdots + \binom{N+M-2}{M-1} q^{M-1}\right)$$

Ulteriori generalizzazioni al caso con più alberi sono conseguibili estendendo il ragionamento che abbiamo fatto, ma per il conteggio del numero di casi si dovrebbe introdurre il coefficiente multinomiale che è certamente al di là dell'interesse che i ragazzi possono riservare a questa prova.

La soluzione completa del problema è comunque descritta in tutti i dettagli negli articoli di P. J. Campbell (2002, 2007).

Uno sguardo alle gare svolte: strategie e difficoltà riscontrate

La prova è stata ripetuta due volte. In entrambi i casi erano state unite due classi terze del Liceo Scientifico Galileo Ferraris di Torino formando sette/otto gruppi di lavoro (15 in tutto).

I ragazzi hanno dimostrato interesse e partecipazione. Un elemento positivo è stato il ruolo degli insegnanti di matematica: in una delle due prove erano presenti e hanno collaborato nel motivare i ragazzi e nel prepararli ad affrontare la gara con entusiasmo vedendola come un'occasione per imparare divertendosi. I risultati sono stati mediamente migliori di quelli del secondo gruppo che appariva inizialmente meno motivato. Anche nel secondo gruppo, comunque, col procedere della gara i ragazzi si sono appassionati e hanno partecipato con entusiasmo.

La scheda 1 è risultata particolarmente ostica: solo 6 gruppi (40%) hanno saputo indicare uno schema per rappresentare gli esiti del gioco. Tutte le squadre tranne una hanno scelto la rappresentazione del diagramma ad albero. Un gruppo, invece, ha scelto di usare un diagramma di flusso (Figura 4): ne è venuta fuori una rappresentazione nella sostanza corretta, che ha reso anche più semplice la risposta ai punti successivamente richiesti nella scheda 1B. Questa scelta è stata da noi particolarmente apprezzata per l'originalità anche se non si è rivelata di grande aiuto nel calcolare le probabilità dei vari esiti ai fini della scheda 2. In un gruppo, uno dei ragazzi ha proposto di scrivere un programma per il calcolatore che simulasse il gioco: sebbene questa sarebbe stata una attività assolutamente utile ed anche rispondente in parte alla domanda, non lo abbiamo consentito in quanto gli altri elementi della squadra non sapevano programmare. Ci teniamo però a sottolineare che è istruttivo assecondare i ragazzi nella formulazione di algoritmi come parte dello sviluppo di un problema matematico.

La difficoltà che abbiamo riscontrato in generale non ci sorprende: la domanda nella parte A della scheda è del tutto aperta e non abbiamo volutamente fornito alcuna guida. Il problema è molto diverso da quelli a cui i ragazzi sono abituati: di solito viene loro insegnata una metodologia risolutiva (es. per le equazioni) e poi vengono proposti molti esempi in cui poterla applicare. Qui il ragionamento è invertito: dato un problema si deve "inventare" una strategia che porti a risolverlo. Sebbene il tasso di successo a questa domanda sia stato basso, riteniamo comunque utile che sia stata proposta in questa forma allo scopo di stimolare la creatività dei ragazzi senza indirizzare le loro scelte. Questa inversione di prospettiva è stata sin dal principio parte degli obiettivi e quasi la metà dei gruppi è riuscita nell'intento.

Anche con le domande specifiche della scheda 1B il tasso di successo non è stato molto alto, eccezion fatta per la domanda 1.3 cui hanno risposto correttamente 10 gruppi.

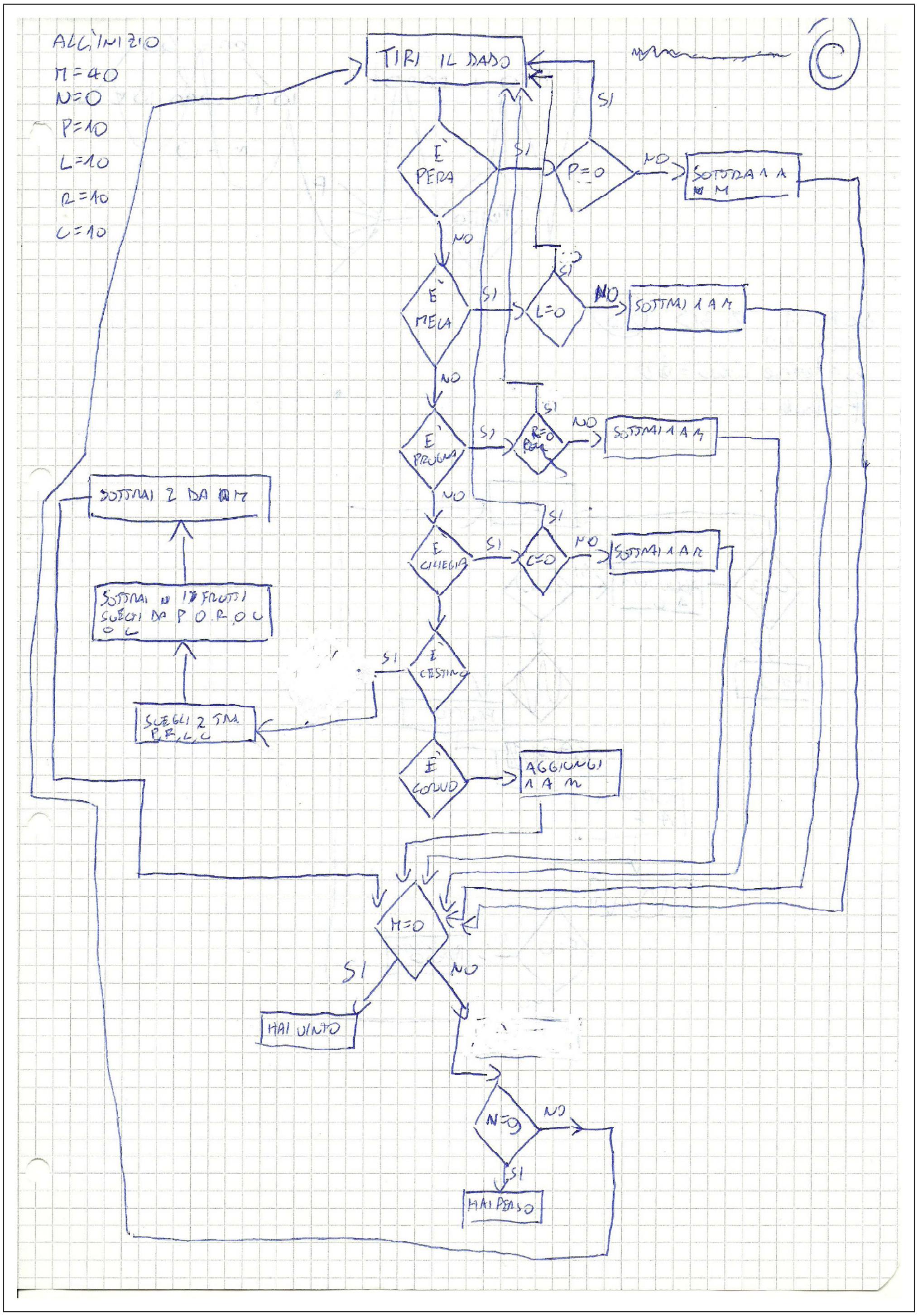


Figura 4 – Diagramma di flusso che schematizza l'evoluzione del gioco

La seconda scheda è stata affrontata con maggiore profitto. Alla domanda aperta nella scheda 2A hanno risposto correttamente solo 5 gruppi, ma alle domande specifiche della 2B, in particolare la 2.1, 2.2, 2.4 la maggioranza delle risposte è risultata corretta.

L'obiettivo iniziale della nostra gara si concretizza nel rispondere alle ultime due domande (2.5 e 2.6). Dei 6 gruppi che hanno individuato una rappresentazione potenzialmente in grado di portarli alla soluzione, soltanto 4 sono effettivamente riusciti a dare una risposta finale corretta. È significativo mostrare qual sia stato l'errore dei 2 gruppi che non hanno concluso correttamente: entrambi si sono limitati a contare quanti rami del diagramma conducono a una vittoria dei bimbi (Figura 5). Essendo questi nel numero di 5 su 9 ne hanno erroneamente concluso che la probabilità di vittoria sia pari a 5/9. L'errore commesso è un classico nel calcolo delle probabilità e consiste nel valutare la probabilità come il numero di "eventi favorevoli" diviso per quello degli "eventi possibili" anche nel caso in cui questi eventi non siano equiprobabili.

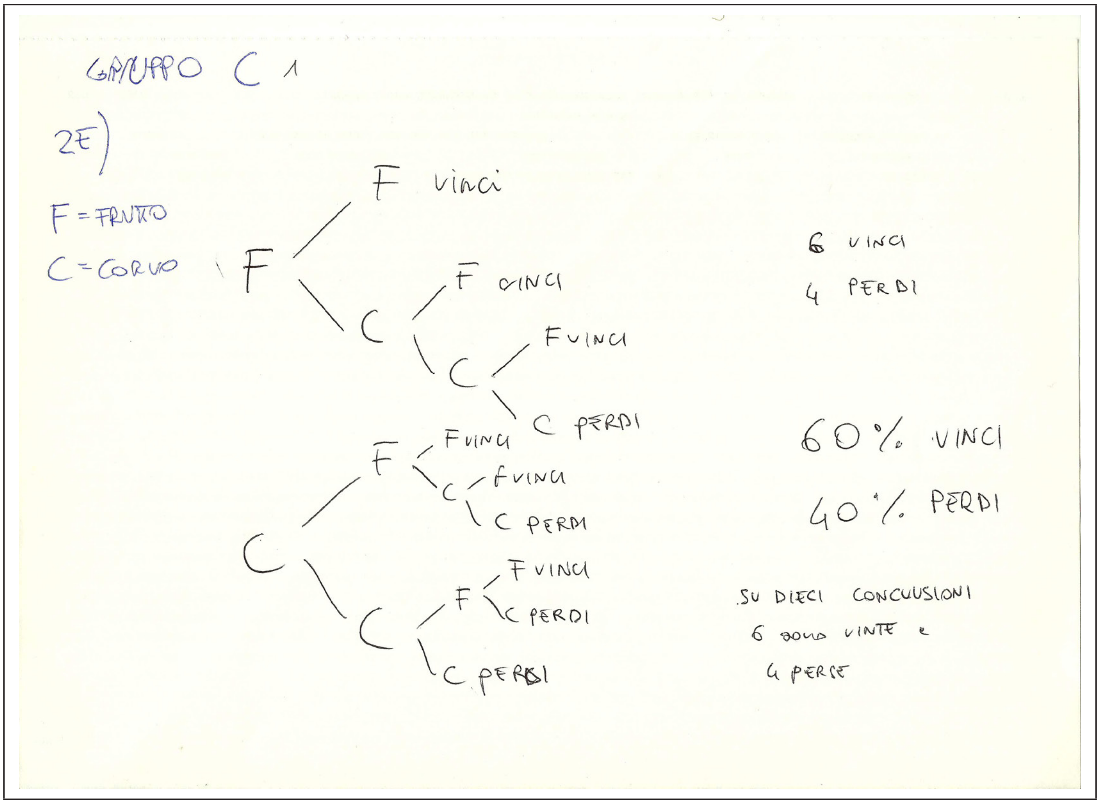


Figura 5 – Risoluzione errata

La prova nel suo complesso è stata difficile ma apprezzata dai ragazzi. Anche chi non è riuscito a dare molte risposte corrette sembra essersi comunque divertito a sperimentare un modo di affrontare problemi matematici più "libero" di quello tradizionale e non legato ai programmi curriculari.

CAPITOLO 3

Le attività proposte: "Indovina la funzione!"

Introduzione

In questo capitolo si descrive un gioco a squadre basato sul riconoscimento di grafici di funzioni reali di variabile reale. L'idea centrale è quella di stimolare, tramite un quiz, la consapevolezza delle connessioni tra vari concetti matematici legati allo studio dei grafici di funzioni elementari (quali ad esempio, traslazioni, dilatazioni, composizione funzionale, ecc.) ed i rispettivi aspetti visivi e grafici. La focalizzazione visiva di un concetto matematico è, infatti, molto spesso, il modo migliore per coglierne l'essenza e comprenderne la conseguente formalizzazione matematica. Inoltre, la capacità di passare con disinvoltura dagli aspetti grafici a quelli formali e viceversa è un elemento certamente importante per una buona formazione scientifica in generale e, matematica, in particolare. Il fatto, poi, di mettere questo procedimento sotto forma di competizione ludica è uno stimolo in più per gli alunni a vedere la disciplina in modo attivo e addirittura "combattivo", invece che come semplice argomento di studio che, molto spesso, si rivela passivo.

Riferimenti alle indicazioni ministeriali e alle linee guida per la scuola secondaria

Primo biennio:

Lo studio delle funzioni del tipo $f(x) = ax + b$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ e la rappresentazione delle rette e delle parabole nel piano cartesiano consentiranno di acquisire i concetti di soluzione delle equazioni di primo e secondo grado in una incognita, delle disequazioni associate e dei sistemi di equazioni lineari in due incognite, nonché le tecniche per la loro risoluzione grafica e algebrica.

Lo studente studierà le funzioni $f(x) = |x|$, $f(x) = a/x$, le funzioni lineari a tratti, le funzioni circolari sia in un contesto strettamente matematico sia in funzione della rappresentazione e soluzione di problemi applicativi.

Lo studente acquisirà la conoscenza delle principali trasformazioni geometriche (traslazioni, rotazioni, simmetrie, similitudini con particolare riguardo al teorema di Talete) e sarà in grado di riconoscere le principali proprietà invarianti.

Lo studio delle funzioni quadratiche si accompagnerà alla rappresentazione geometrica delle coniche nel piano cartesiano. L'intervento dell'algebra nella rappresentazione degli oggetti geometrici non sarà disgiunto dall'approfondimento della portata concettuale e tecnica di questa branca della matematica.

Saranno inoltre studiate le funzioni circolari e le loro proprietà e relazioni elementari.

Secondo biennio

Approfondirà lo studio delle funzioni elementari dell'analisi e, in particolare, delle funzioni esponenziale e logaritmo.

Infine, lo studente apprenderà ad analizzare sia graficamente che analiticamente le principali funzioni e saprà operare su funzioni composte e inverse.

Descrizione dell'attività per gli insegnanti

- **Contesto**: gioco a squadre che consiste nell'indovinare l'espressione matematica di una funzione dall'osservazione del suo grafico.
- **Ordine di scuola:** secondo biennio e ultimo anno della scuola secondaria di II grado.
- **Materiale:** fogli bianchi e penne; schede preparate dagli organizzatori; computer e proiettore necessari agli organizzatori per mostrare le funzioni e valutare le risposte durante la gara; connessione internet per l'utilizzo di software di calcolo disponibile online (ad esempio *Wolfram Alpha* http://www.wolframalpha.com/input/?i=integrate).
- **Prerequisiti e obiettivi:** l'attività si concentra sui concetti di composizione di funzione e passaggio dal grafico qualitativo all'espressione analitica. Costituiscono pertanto un prerequisito la conoscenza dei grafici di funzioni elementari, la composizione di funzioni e le trasformazioni geometriche applicate alle funzioni, in particolar modo per quanto riguarda gli aspetti grafici.

  Come si è accennato, lo scopo di questo gioco a squadre è porre in risalto le connessioni tra aspetti grafici e formali della matematica. In particolare il gioco è volto a mostrare come le conoscenze matematiche acquisite dagli studenti al fine di tracciare i grafici di funzioni elementari di vario tipo, a partire dalle loro espressioni matematiche, possano essere usate in modo divertente anche in senso "inverso". L'idea centrale è, infatti, quella di indovinare l'espressione matematica esplicita di una funzione di cui viene mostrato il grafico. Ovviamente questo processo "inverso" non può possedere il carattere di univocità che possiede il processo diretto: data un'espressione esplicita, ad essa corrisponde un solo grafico nel piano; dato invece un grafico qualitativo di una funzione, più espressioni possono mostrare un andamento compatibile con il grafico dato. Una certa dose di fortuna è quindi sicuramente presente nel determinare successo ed insuccesso, anche se mediamente il gioco tende senza dubbio a premiare buone conoscenze matematiche e soprattutto la capacità di metterle in azione "alla rovescia".

  La minima dose di fortuna coinvolta dovrebbe comunque incoraggiare gli studenti a prendere successo e insuccesso in questo gioco non come un "verdetto" sulle loro capacità matematiche bensì come semplice modo per divertirsi un po' con la matematica. Il gioco inoltre stimola un utilizzo delle nozioni matematiche da un punto di vista attivo, critico e creativo.

  Per chi volesse poi andare oltre al carattere puramente ludico, è inoltre offerto uno spunto di approfondimento matematico non banale venendo ad essere coinvolto in modo implicito e molto pratico un argomento di centrale importanza in tutta la matematica e cioè il concetto di "distanza" tra funzioni che si presenta qui nella scelta del criterio di valutazione delle risposte ai quiz (si veda *Note per gli insegnanti riguardo la valutazione delle risposte*).
- **Descrizione attività e indicazioni metodologiche:** il gioco consiste in una serie di quiz, il cui numero naturalmente dipende dal tempo a disposizione. Ogni quiz consiste nell'indovinare l'espressione analitica $f(x)$ (per es. $3x^2 + 1$) di un grafico che viene proiettato su uno schermo per 5 minuti a tutte le squadre partecipanti. Le immagini mostrate fanno parte di un file precedentemente preparato dagli insegnanti.

  In questi 5 minuti i componenti di ogni squadra devono consultarsi e scrivere su un foglio quella che ritengono sia l'espressione matematica della funzione f(x) che vedono proiettata.

I ragazzi vengono divisi in squadre eterogenee formate da un numero a piacere di studenti (il numero massimo consigliato è, tuttavia, di 4-6 squadre, di 3-6 persone per squadra). Il gioco è diretto da una giuria di docenti (il numero consigliato è di 3 persone) che pone i quiz e valuta le risposte tramite un opportuno software nel corso della gara. Ogni squadra si riunisce attorno ad un tavolo su cui trova fogli di lavoro, penne e due schede previamente preparate dai docenti. Una di queste contiene l'elenco delle funzioni elementari cui fare riferimento (si veda, a titolo di esempio, la seguente tabella):

ax + b (a, b $\in \mathbb{R}$)	$\frac{1}{x}$	$\lvert x \rvert$
$\sqrt{x}$	x^2	$\sin x$
$\cos x$	$\tan x$	…

L'altra scheda è pensata perché gli studenti possano raccogliere le loro risposte e consegnarle su un unico foglio di volta in volta:

Squadra: *nome della squadra*	
1)	y =
2)	y =
3)	y =
4)	y =
5)	y =
6)	y =
7)	y =
8)	y =
9)	y =
10)	y =

- Come preparare il gioco: i docenti che preparano il gioco si basano sulla prima tabella per costruire le funzioni da indovinare. Chiaramente il tipo di funzioni che compaiono varierà a seconda che siano coinvolte classi del terzo, quarto o quinto anno e anche nell'ambito di uno stesso anno è auspicabile adattare la tabella opportunamente in base alle conoscenze degli studenti coinvolti nel gioco. Alcune funzioni, non ancora studiate a lezione, possono essere eliminate, mentre altre, previste nel programma scolastico (come, ad esempio, le funzioni esponenziale e logaritmica), possono essere aggiunte. In seguito, le funzioni costruite (come, ad esempio $3x^2 + 1$) vengono disegnate in opportuni intervalli I. Per tracciare i grafici, la scelta del software è a discrezione degli insegnanti (nel nostro caso specifico abbiamo utilizzato GeoGebra e Maple). Dall'esperienza fatta è consigliabile che i docenti abbiano precedentemente preparato su file tutti i grafici necessari in modo da non rallentare il ritmo del gioco con tempi di attesa.

Ogni squadra coinvolta avrà a disposizione una copia della tabella utilizzata dai docenti, in modo che siano note a tutti i partecipanti le funzioni elementari chiamate in causa.

- **Tempo di svolgimento previsto:** l'esperienza fatta suggerisce che 10 quiz impegnano approssimativamente 90 minuti.
- **Contenuti matematici:** i contenuti matematici coinvolti nell'attività si riferiscono al concetto di funzione, con particolare attenzione ai differenti registri grafico e simbolico. Elemento cardine è costituito dalla composizione funzionale e dalla conoscenza dei grafici di alcune funzioni elementari da cui per composizione e applicazione di trasformazioni geometriche si ottengono i grafici proposti. Particolare attenzione viene dedicata al grafico qualitativo di una funzione, al fine di dedurne tutte le informazioni necessarie.

Nota per gli insegnanti riguardo la valutazione delle risposte: appena una squadra si trova d'accordo sull'espressione della funzione, poiché nell'assegnazione dei punti conta anche l'ordine di consegna, un rappresentante prescelto da ciascun gruppo deve correre dalla giuria e consegnare il foglio con la risposta della propria squadra.

Scaduti i 5 minuti assegnati, la giuria non ritira più altre risposte e compila la classifica delle squadre che hanno consegnato, per il quiz in questione. I punteggi sono assegnati in modo inversamente proporzionale alla "distanza" in norma tra la risposta di ogni squadra e l'espressione corretta corrispondente. Ciò significa, per ogni risposta ricevuta, la giuria dei docenti deve valutare (ad esempio tramite *Wolfram Alpha*) la seguente quantità numerica:

$$dist(f,f_j) = \| f - f_j \|_{L^1(I)} = \int_I |f(x) - f_j(x)| \, dx,$$

dove "f_j" indica la risposta fornita dalla squadra j-esima (con j che varia tra 1 e il numero di squadre coinvolte). Si osservi che, con l'espressione $dist(f,f_j)$, si vuole valutare l'errore tra l'espressione originale della funzione e quella congetturata dagli studenti. Più basso è l'errore, più alto è il punteggio. Ovviamente l'errore minimo che si può commettere è zero, se la funzione viene indovinata in modo esatto. Precisamente si assegnano:

- 2 punti, per la squadra che ha commesso l'errore minimo;
- 1 punto, per la squadra che ha commesso un errore immediatamente superiore a quello minimo;
- 0 punti per tutte le altre squadre.

In caso di parità nell'errore commesso prevale la squadra che ha consegnato per prima (ecco spiegata la ragione per cui si tiene conto dell'ordine di consegna).

Per annotare i punteggi delle squadre si consiglia l'utilizzo di una tabella del tipo:

		Squadre:								
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Funzioni	**F.1**									
	F.2									
	F.3									
	F.4									
	F.5									
	F.6									
	F.7									
	F.8									
	F.9									
	F.10									
	TOT									

Alla fine del gioco (che coincide con l'ultima funzione proposta) vince, ovviamente, la squadra con il punteggio più alto. Si procede eventualmente ad uno spareggio, presentando un'ultima funzione, nel caso in cui più squadre abbiano totalizzato il punteggio massimo.

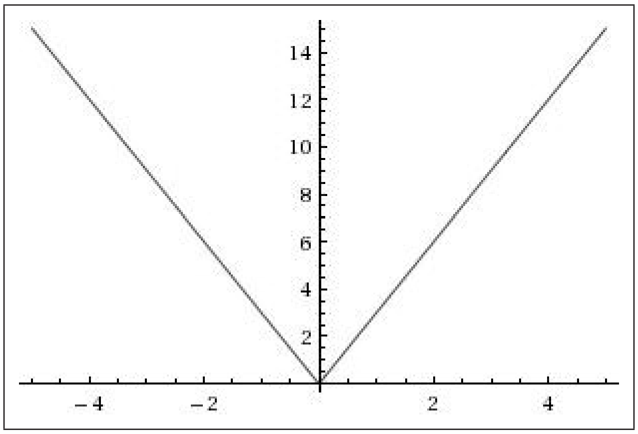
Nuclei coinvolti, conoscenze e abilità interessate

Abilità	**Conoscenze**	**Nuclei coinvolti (UMI, 2003)**	
		disciplinari	**trasversali**
- Utilizzare in casi semplici la composizione di funzioni note per studiare nuove funzioni.	- Esempi di funzioni e dei loro grafici: funzione potenza, funzioni polinomiali, la funzione "modulo", funzioni definite a tratti, semplici funzioni razionali. - La funzione esponenziale; la funzione logaritmica; le funzioni seno, coseno, tangente. I loro grafici.	Relazioni e funzioni	

- Individuare proprietà invarianti per isometrie nel piano. - Individuare proprietà invarianti per similitudini. Analizzare e risolvere semplici problemi mediante l'applicazione delle similitudini.	- Le isometrie nel piano: traslazioni, rotazioni, simmetrie. - Omotetie e similitudini nel piano. - Trasformazioni nel piano: composizione di due isometrie e di un'isometria con un'omotetia.	Spazio e figure	

Approfondimento

Come accennato in precedenza, uno degli aspetti che incidentalmente possono offrire più spunti di riflessione ed approfondimento dal punto di vista matematico è il sistema usato per la valutazione delle risposte. Consideriamo il caso sia data da indovinare la seguente funzione:



sull'intervallo $-5 \leq x \leq +5$.

La risposta corretta è $f(x) = 3|x|$. Consideriamo ora le due seguenti possibili risposte:

squadra 1: $f_1(x) = 3|x|$
squadra 2: $f_2(x) = x^2$

Il buon senso suggerisce chiaramente che è la squadra 1 ad essersi avvicinata di più. L'errore da essa commesso è infatti soltanto una costante moltiplicativa mentre è ovvio che la squadra 2 ha completamente sbagliato il tipo di funzione dando una risposta del tutto assurda. Tuttavia ecco il responso della valutazione in norma $L^1([-5,5])$:

$\int_{-5}^{5} |3|x| - |x|| dx = 50$

$\int_{-5}^{5} |3|x| - x^2 | dx = \frac{79}{3}$

Dunque in base alle regole stabilite sarà la squadra 2 a vincere.

Casi come questo, benché abbastanza rari, possono certamente capitare e si sono effettivamente verificati durante lo svolgimento della nostra gara in un paio di occasioni. Ciò può creare una certa perplessità tra gli studenti, ma si tratta di uno smarrimento estremamente "salutare" al fine di una vera maturazione matematica!

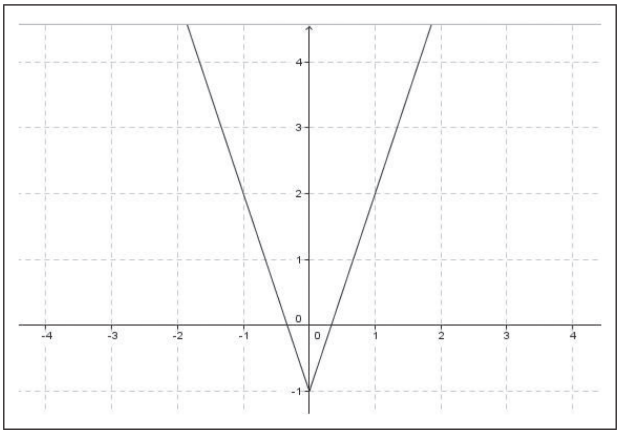
Il metodo di valutazione in base alla norma $L^1(I)$ porta infatti in modo naturale a porsi alcune sensate domande: Che sia un criterio di valutazione obiettivo è chiaro, ma è anche un criterio "corretto"? Cosa vuol dire "corretto"? Cos'è la "distanza" tra due funzioni? Si potrebbe definire una distanza tra funzioni che sia "più corretta"?

Ovviamente non esiste una risposta univoca a queste domande e l'insegnante potrebbe prendere da qui lo spunto per far presente agli studenti che questo banale gioco ha condotto verso una delle "strade di accesso" ad uno dei settori più vasti e profondi della matematica: il settore che studia il concetto di vicinanza/lontananza degli oggetti matematici, ovvero la topologia.

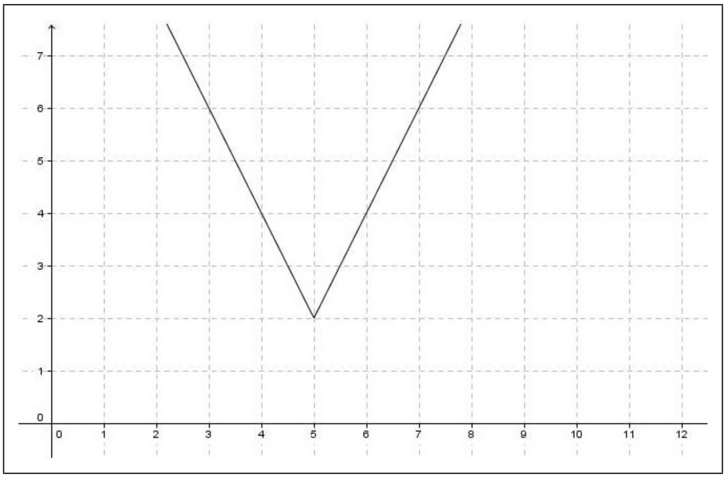
Una riflessione su questi temi conduce d'altra parte inevitabilmente al delicato legame tra le definizioni degli oggetti matematici e la realtà stessa ed al nostro modo di percepirla, tema che nel caso di classi di liceo potrebbe essere sviluppato in modo interdisciplinare in collaborazione con gli insegnanti di filosofia.

Simulazione di gara e soluzioni

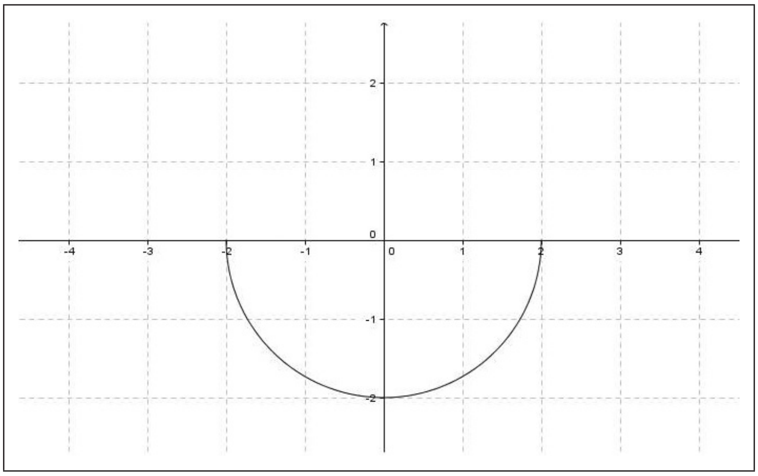
A titolo di esempio riportiamo i grafici assegnati durante una gara al liceo scientifico N. Copernico di Torino (Aprile 2013):



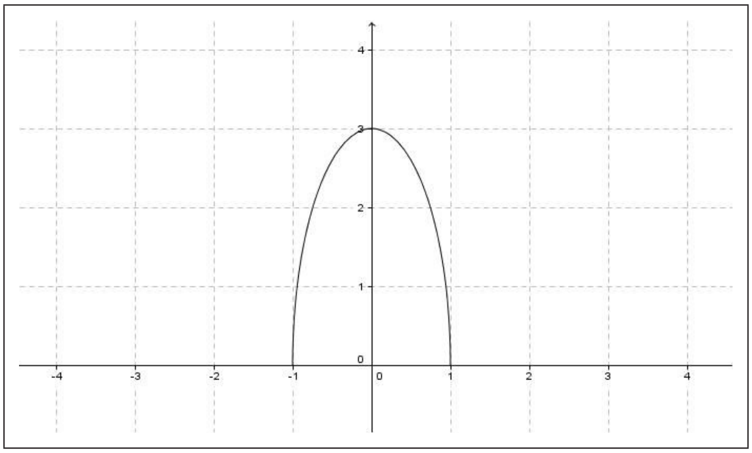
Funzione 1: $\boldsymbol{y = 3|x| - 1}$, *da valutare nell'intervallo [-5,5].*



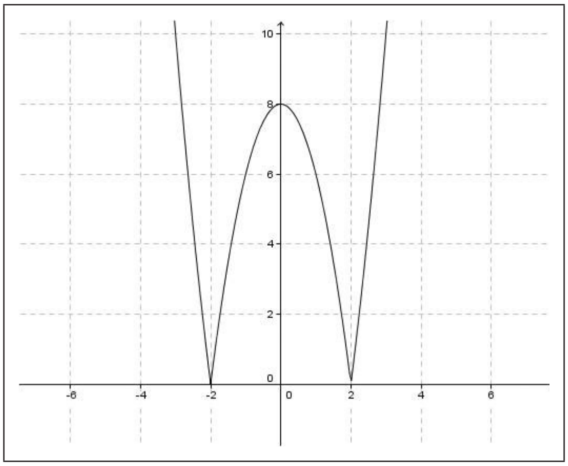
Funzione 2: $\boldsymbol{y = |2x - 10| + 2}$*, da valutare nell'intervallo [0,10].*



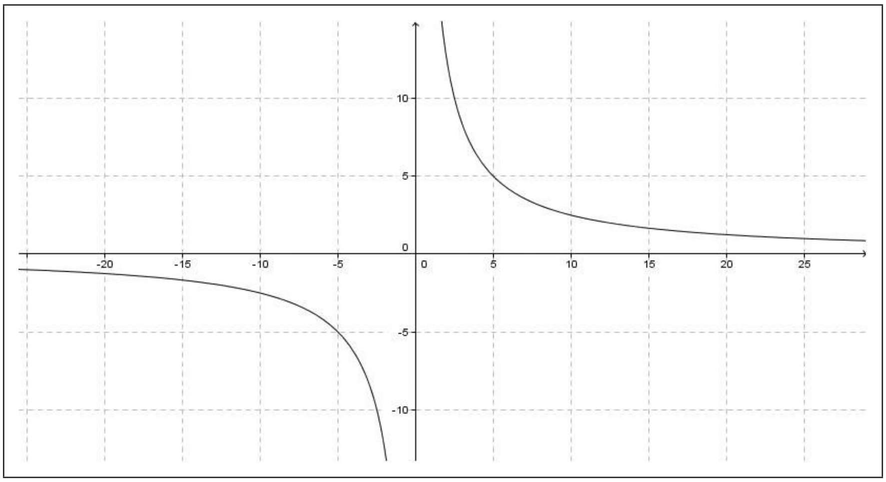
Funzione 3: $\boldsymbol{y = -\sqrt{4 - x^2}}$*, da valutare nell'intervallo [-4,4].*



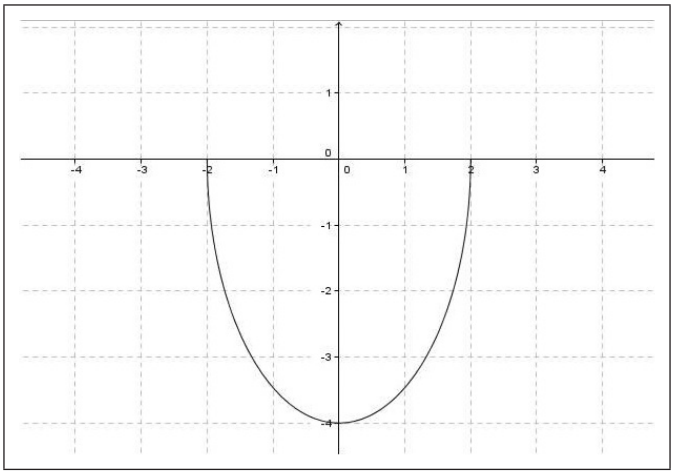
Funzione 4: $\boldsymbol{y = 3\sqrt{1 - x^2}}$*, da valutare nell'intervallo [-3,3].*



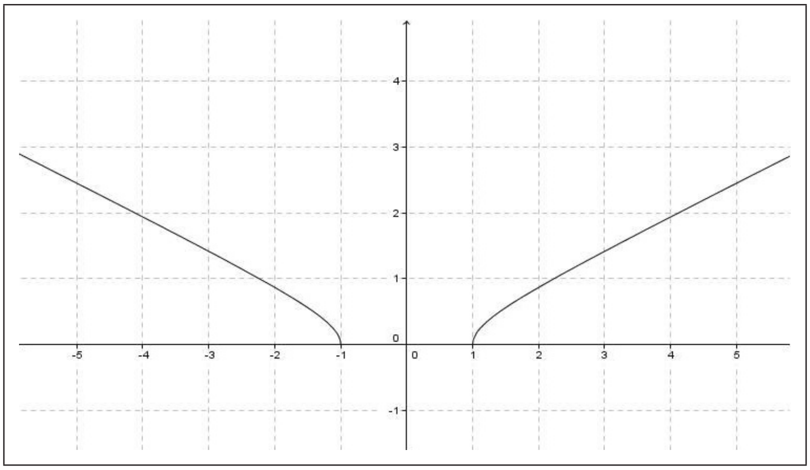
Funzione 5: $y = |2x^2 - 8|$, *da valutare nell'intervallo [-3,3].*



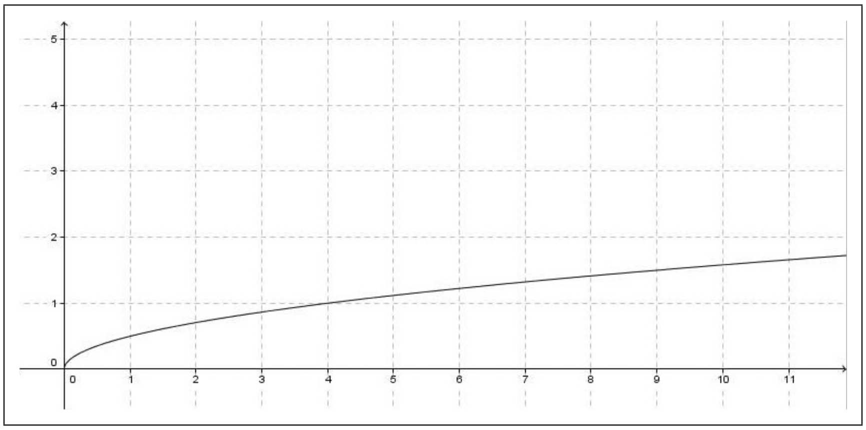
Funzione 6: $y = \frac{25}{x}$, *da valutare nell'intervallo [-25,25].*



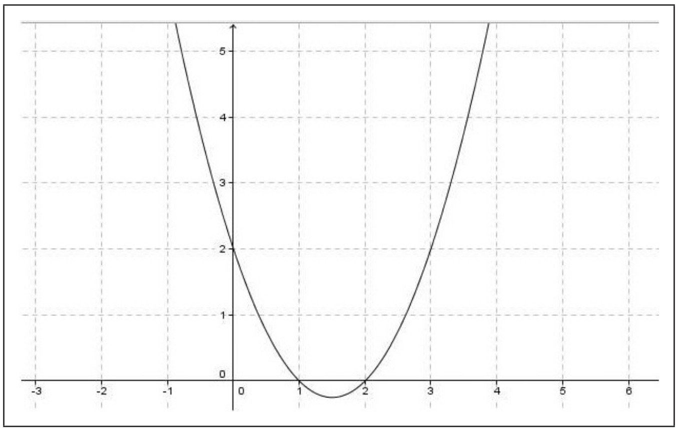
Funzione 7: $y = -2\sqrt{4 - x^2}$, *da valutare nell'intervallo [-4,4].*



Funzione 8: $\boldsymbol{y = \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}}$, *da valutare nell'intervallo [-5,5].*



Funzione 9: $\boldsymbol{y = \frac{1}{2}\sqrt{x}}$, *da valutare nell'intervallo [0,10].*



Funzione 10: $\boldsymbol{y = x^2 - 3x + 2}$, *da valutare nell'intervallo [-6,6].*

Note

a) Le gare sono state svolte nella primavera 2013 presso i licei scientifici Copernico di Torino e Darwin di Rivoli (TO) riscontrando successo ed interesse da parte degli studenti. Per quanto riguarda l'organizzazione della gara va notato che i compiti della giuria sono essenzialmente 3: presentazione dei quiz, raccolta e valutazione delle risposte, aggiornamento del punteggio delle squadre. Difficilmente questo può essere svolto in modo efficace da meno di 3 persone.

b) Molte varianti sono possibili, eccone due:

1) I quiz vengono formulati a turno da una delle squadre alle altre. Questa variante impegna più attivamente i partecipanti ma ha il grosso problema che molte delle composizioni funzionali possibili potrebbero risultare al di fuori della portata degli studenti specialmente per quanto riguarda le classi terze.
2) Il grafico viene mostrato solo per alcuni secondi aggiungendo così al gioco la difficoltà di ricordarlo.

Uno sguardo alle gare svolte: strategie e difficoltà riscontrate

Dedichiamo questo paragrafo all'analisi delle gare che abbiamo svolto il 23/04/2013 presso il Liceo Copernico di Torino, e il 03/05/2013 presso il Liceo Darwin di Rivoli.

	N. Copernico	**Darwin**
Numero squadre	6	8
Tempo impiegato	1 h	1 h

Il laboratorio è stato vissuto con grande interesse da parte di tutti gli studenti coinvolti in entrambi gli istituti, e si è riscontata una forte competizione fra le diverse squadre. Alla spiegazione delle regole del gioco da parte degli organizzatori, è seguita una prova, necessaria ai ragazzi per capire come organizzarsi per gestire le varie fasi dell'attività. I compiti sono stati ripartiti all'interno del team nel seguente modo: è stato designato un portavoce per la consegna della soluzione, ad un altro membro del gruppo è stato richiesto di prendere nota dell'unità di misura degli assi sull'immagine proiettata, a un altro ancora di fare calcoli in tempo reale, e così via. Si è, pertanto, stabilita una modalità di lavoro di tipo cooperativo.

Nello svolgimento della gioco è emersa la tendenza ad utilizzare espedienti non corretti, ma utili al fine della gara: gli studenti hanno notato che approssimare $y = \pm\sqrt{ax^2+b}$ con una parabola portava ad un errore molto piccolo e hanno, dunque, utilizzato intenzionalmente lo stesso procedimento ogni volta che si ripresentava la situazione, trascurando la conseguente imprecisione. Al Liceo Copernico, la prima funzione proposta ($y = x^2 - 3x + 2$) è stata indovinata da due squadre su sei e gli errori più frequenti hanno riguardato scelte non corrette dei coefficienti numerici.

La seconda funzione ($y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$) è, invece, stata indovinata solo da una squadra, poiché le altre cinque hanno esplicitato la variabile scrivendo ad esempio $x = 4y^2$. Questa risposta, in particolare, potrebbe anche risultare, sotto opportune restrizioni, accettabile a livello teorico, ma non è stata riconosciuta valida nel contesto specifico della gara, in quanto veniva esplicitamente richiesta l'espressione in funzione di x. Probabilmente, per come sono abituati, agli studenti risulta più semplice e naturale evitare di usare le radici, dato che questa operazione imporrebbe loro una scelta di segno.

A partire dalla terza funzione ($y = \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}$) i ragazzi hanno provveduto a fornire la soluzione nella forma y = $f(x)$ e, quindi, non hanno esitato ad estrarre le radici, dove necessario. Tuttavia, ciò ha portato ad altri tipi di confusione ed errore. Per esempio gli studenti hanno trascurato la discussione del segno ed hanno sbagliato nella stima dei coefficienti. Come conseguenza, solo due squadre hanno consegnato la risposta per la terza funzione e solo una delle due si è avvicinata alla soluzione, dimenticando, però, il coefficiente $\frac{1}{2}$. Gli stessi errori si sono riscontrati nella quarta funzione ($y = -2\sqrt{4-x^2}$), specialmente per quanto riguarda il segno.

Figura 1 – Una squadra al lavoro

Nella quinta funzione ($y = \frac{25}{x}$) l'errore più comune, commesso da quattro squadre su sei, che hanno scritto $y = \frac{1}{x}$, è stato quello di non tenere conto dell' unità di misura sugli assi cartesiani.

La sesta funzione ($y = |2x^2 - 8|$) è stata individuata correttamente da due squadre, mentre le altre quattro hanno fornito risposte con errori di segno e/o coefficienti numerici, come ad esempio $y = |2x^2 + 8|$. Per gli stessi motivi, nessuna squadra ha indovinato la settima funzione ($y = |2x - 10| + 2$).

In generale, possiamo sintetizzare gli errori più frequenti in scelte sbagliate dei coefficienti numerici, disattenzioni relative all'unità di misura sugli assi e imprecisioni sui segni (specie nel caso di estrazione di radici quadrate).

Figura 2 – Squadre al lavoro

Al termine di questo laboratorio ci riteniamo soddisfatti per aver raggiunto gli obiettivi previsti dal PLS, avendo registrato un grande entusiasmo non solo da parte degli studenti, ma anche degli stessi professori coinvolti. Tale attività, infatti, da un lato ha permesso ai ragazzi di mettere in gioco le proprie conoscenze nello studio di funzioni, acquisite durante le lezioni in aula, dall'altro ha offerto ai professori uno spunto di approfondimento sul tema dell'approssimazione di funzioni.

CAPITOLO 4

LE CONFERENZE

Introduzione

Al termine di ogni gara i ragazzi hanno avuto l'opportunità di assistere ad una conferenza, pensata e realizzata per offrire loro l'occasione di conoscere temi, problemi e curiosità della matematica, soprattutto in relazione al settore del lavoro e della vita di tutti i giorni. Le conferenze hanno rappresentato per gli studenti un momento di riflessione, evidenziando come la matematica sia di fondamentale importanza nella comprensione della realtà che ci circonda e come essa sia presente, in maniera più o meno nascosta, in molte situazioni della vita quotidiana, a partire dai videogiochi per arrivare alle previsioni del tempo.

Si è cercato dunque di incuriosire e stimolare i ragazzi, non solo parlando di aspetti affascinanti della disciplina, ma anche elencando le varie possibilità di impiego nel mondo del lavoro, nel quale oggi i matematici sono sempre più richiesti, al fine di orientarli verso lo studio delle discipline scientifiche in previsione della più o meno imminente scelta universitaria. Gli studenti, infatti, hanno avuto la possibilità di porre domande non solo a professori universitari, ma anche a giovani dottorandi e laureandi, più vicini alla loro età e più sensibili alla loro realtà.

Sono state realizzate due diverse presentazioni: una per gli studenti del primo biennio, focalizzata sulla matematica nei videogiochi, allo scopo di mostrare su un esempio concreto l'utilità e la bellezza della materia; l'altra per gli studenti del triennio, centrata sugli aspetti più affascinanti della matematica e soprattutto sul collegamento con il mondo del lavoro.

Conferenza biennio: "La matematica nei videogiochi"

Questa presentazione è stata pensata per lasciare i ragazzi con un messaggio, in sintonia con gli obiettivi generali del Piano Lauree Scientifiche: la matematica ci circonda. Essa, infatti, non si trova solo sui libri e tra i banchi di scuola, ma anche nelle cose con cui veniamo a contatto tutti i giorni, per esempio divertendoci con un videogioco. Lo scopo di questo breve intervento è di mostrare che alcuni concetti matematici alla base del funzionamento dei videogiochi sono già stati studiati o saranno prossimamente affrontati al liceo. Dunque la presentazione vuole essere un incentivo per i ragazzi a studiare o a vedere tali nozioni matematiche da una prospettiva differente e, perché no, con maggiore slancio.

Chi non ha mai giocato o almeno visto un videogioco, dal primo Super Mario degli anni '80 all'ultimissima versione touch-screen di Temple Run (Figura 1)? La domanda sorge spontanea: "Ma come funziona un videogioco?"

Figura 1 - Esempi di videogiochi, più o meno recenti: procedendo in senso orario, a partire da Super Mario Bros (Nintendo) nell'angolo in alto a sinistra, abbiamo Pro Evolution Soccer (Konami), Temple Run (Imangi Studios), Prince of Persia (Ubisoft), Tekken (Namco), Crash Bandicoot (Naughty Dog e Sony Computer Entertainment).

Non abbiamo certo la pretesa di rispondere a questa complessa domanda, che richiede mesi di lavoro di intere squadre di programmatori, ma cerchiamo di comprendere, nel nostro piccolo, cosa c'è alla base delle ambientazioni, dei personaggi e delle situazioni a cui diamo vita semplicemente premendo un tasto sul nostro joystick, muovendo il mouse del nostro computer o toccando con un dito lo schermo del nostro smartphone.

Partiamo da un elemento fondamentale nella costruzione di un videogioco: la grafica, tanto quella dell'ambiente quanto quella dei personaggi (Figura 2).

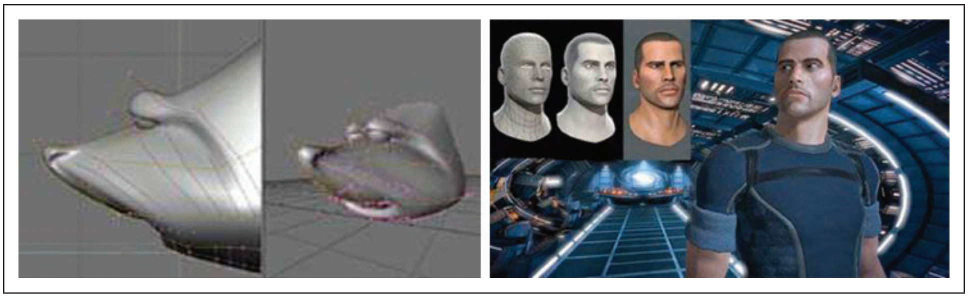


Figura 2 - La grafica dei personaggi (immagini tratte da users.dma.unipi.it/franciosi)

L'interfaccia di un videogioco è la sua grafica: il paesaggio, l'architettura della scena, ma anche l'espressività, la verosimiglianza e la rapidità di adattamento ai cambiamenti dei personaggi. E la grafica di un videogioco è tutta una questione di matematica!

Per rendercene conto, seguiamo rapidamente le fasi di creazione di una scena. Il primo compito che il programmatore si trova ad affrontare è rendere un mondo tridimensionale in una scena bidimensionale e dunque creare un senso di profondità. A tale scopo, si utilizza il concetto tridimensionale di "skybox", che in poche parole corrisponde al punto di fuga. Fissata la posizione dello "skybox", i programmatori grafici tracciano linee che si irradiano dal punto di fuga verso gli angoli dello schermo (Figura 3)

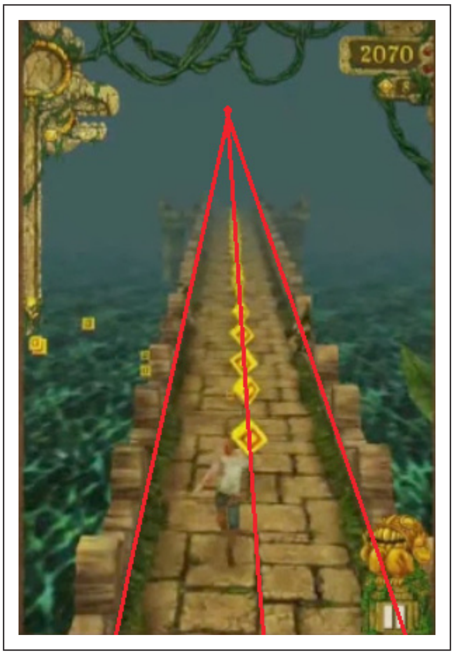


Figura 3 - Esempio di "skybox" e linee di fuga (Temple Run, Imangi Studios; immagine utilizzata per fini didattici).

Per sviluppare figure e scene, si inizia con una forma geometrica di base dell'oggetto, che viene poi arricchita di altre linee e forme per conferire profondità alla grafica, ovvero un aspetto tridimensionale. Solo dopo aver delineato tale struttura si inizieranno ad inserire i colori.

Il procedimento illustrato è molto simile a quello di un artista che progetta la scena nel suo disegno, con la differenza che esso non rimane eseguito a mano su fogli di carta, ma deve essere realizzato a computer lavorando con ogni pixel dello schermo. Per “trasformare” l'immagine preparata su un foglio di carta nell'immagine che si vede sullo schermo, si deve associare ad ogni pixel un colore: la nostra figura prenderà quindi vita come giustapposizione di pixel colorati.

Illustriamo il procedimento mediante un semplice esempio di acquisizione di un'immagine digitale (Figura 4). L'immagine del gatto Felix (sulla sinistra) è composta da 35^2 ossia 1225 pixel ed è in bianco e nero. Essa è elaborata in una tabella, detta matrice, 35 x 35, riempita con i numeri 0 = nero e 1 = bianco, a seconda del colore che si vuole associare al pixel corrispondente alla casella. Una volta che la figura è stata così acquisita e memorizzata, tutte le modifiche all'immagine si traducono in calcoli su questa matrice.

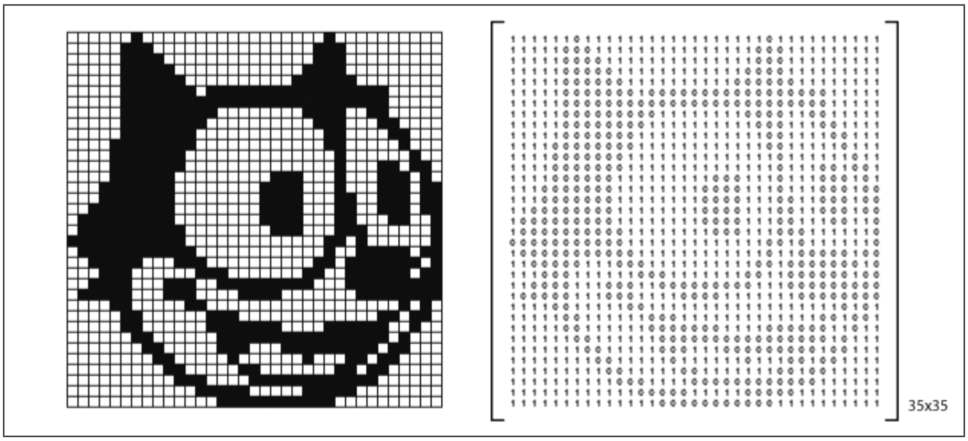


Figura 4 - L'acquisizione dell'immagine digitale del gatto Felix in una matrice (immagine tratta da blog.kleinproject.org)

Certo, 1225 è un numero bassissimo di pixel e l'immagine risulta sgranata e sgradevole alla vista. La quantità di pixel con cui hanno a che fare i programmatori di videogiochi è molto più alta e possiamo farcene un'idea grazie ai dati riportati in Figura 5.

Figura 5 – Numero indicativo di pixel per lo schermo di un pc, una TV LCD e un iPad

L'aumento del numero di pixel a disposizione spiega perché la qualità grafica dei videogame oggi appare migliore di quella dei primi videogame prodotti negli anni ‘80. Per esempio, Super Mario Bros per NES (Nintendo Entertainment System), nel 1985, aveva un'altezza di 16 pixel e una larghezza massima di 12 pixel (Figura 6). Già nel 2007, Super Paper Mario per Nintendo Wii è formato da circa 16 volte la stessa quantità di pixel!

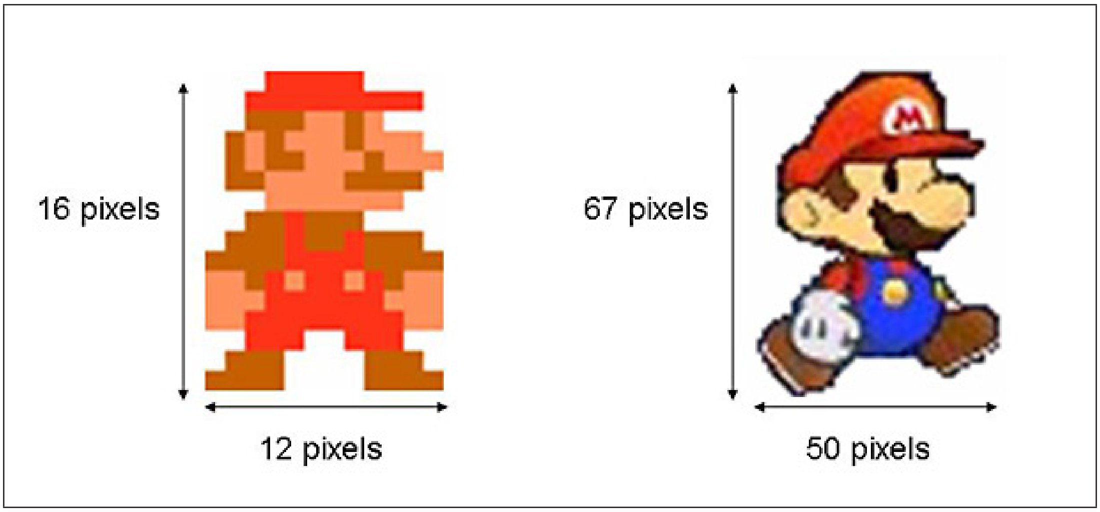


Figura 6 - L'evoluzione di Super Mario: a sinistra, Mario nel 1985 per NES;
a destra, Mario nel 2007 per Nintendo Wii
(Super Mario Bros, Nintendo; immagine tratta da www.sciencebuddies.org).

La matematica però non è solo alla base della grafica, ma anche del movimento, altro fattore fondamentale in un videogioco (altrimenti che divertimento ci sarebbe!).

Vediamo allora alcuni dei concetti matematici che permettono di introdurre il movimento in un videogame.

Le matrici. Abbiamo già parlato di matrici a proposito del gatto Felix: non sono altro che tabelle di numeri. Alcune particolari matrici sono indispensabili per generare traslazioni e rotazioni in un videogioco. Ecco un esempio in 2D: la rotazione di 90° di un blocco di Tetris (Figura 7) coinvolge calcoli con una piccola matrice.

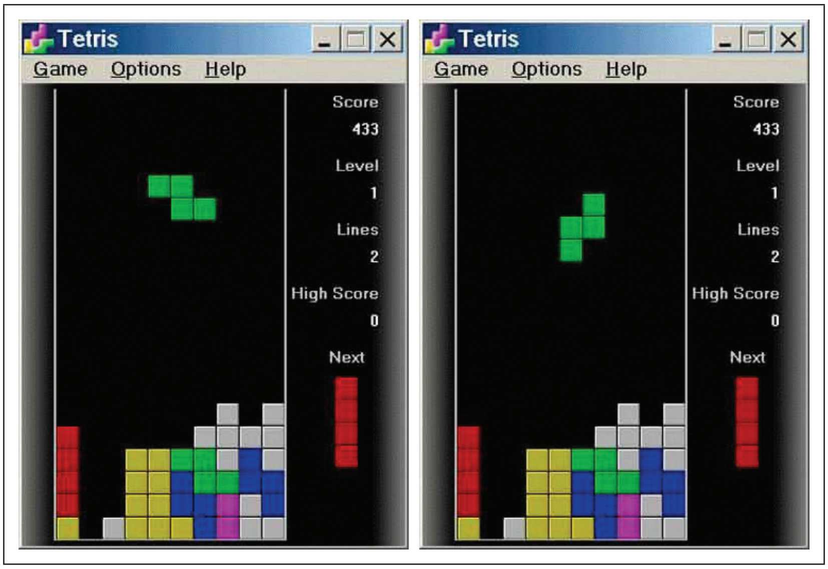


Figura 7 - Rotazione di 90° di un blocco di Tetris
(Tetris, Atari; immagine utilizzata per fini didattici)

Le coordinate. Ogni oggetto occupa uno spazio in pixel nella grafica 2D del videogame, a cui sono assegnate precise coordinate, come in un piano cartesiano. La sola differenza è che il pixel di coordinate (0,0) è quello posto in alto a sinistra, dunque l'ascissa dei pixel va aumentando da sinistra verso destra, mentre l'ordinata va crescendo dall'alto verso il basso dello schermo (diversamente dalle direzioni usuali nel piano cartesiano). Lo schermo corrisponde così ad una grande matrice in cui l'elemento posto all'incrocio tra la *i*-esima riga e la *j*-esima colonna è contrassegnato dalle coordinate *(i,j)*: ogni fotogramma del videogame gioca sulla variazione di tali coordinate.

Ogni oggetto che occupa uno spazio sullo schermo può essere inscritto in un rettangolo di pixel: così, per esempio, il rettangolo ABCD con A(50,30), B(80,30), C(80,50) e D(50,50) delimita il blocco di Tetris in Figura 8. A questo punto, per constatare se il blocco si incastra nella struttura sottostante è sufficiente verificare che il rettangolo ABCD coincida con A'B'C'D'. In generale, le tecniche comunemente usate per testare se due oggetti si sono scontrati, toccati o incastrati sono la delimitazione di oggetti in rettangoli e la formula della distanza tra due punti.

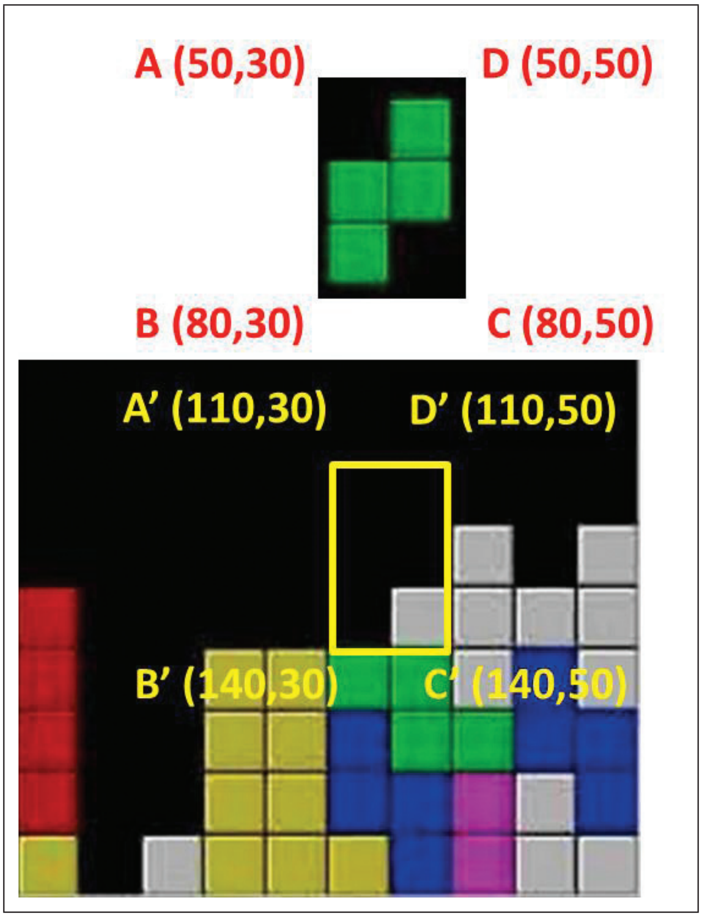


Figura 8 - Le coordinate assegnate ai pixel (Tetris, Atari; immagine utilizzata per fini didattici).

Gli angoli. Conoscere per esempio con quale angolo viene sparato un proiettile permette di risalire alle componenti orizzontale e verticale della sua velocità, servendosi di particolari funzioni dell'angolo dette seno e coseno (Figura 9). Così si può verificare se il proiettile andrà a colpire il bersaglio e anche calcolare il punto di impatto.

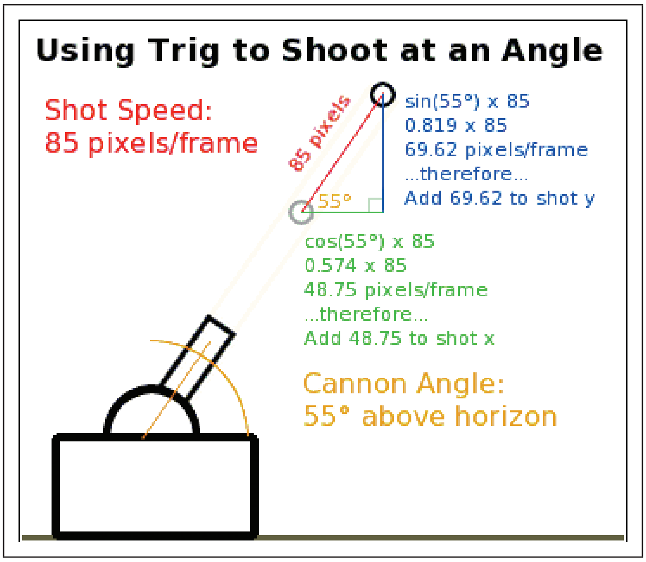


Figura 9 - L'angolo di sparo e la velocità del proiettile (immagine tratta da gamedevlessons.com/lessons).

La logica. Le implicazioni e i connettivi logici, con i quali i ragazzi si sono cimentati nella caccia al tesoro sull'Isola di Baal, sono importantissimi per la programmazione di un videogame. «*Se* il giocatore è a terra **E** preme il bottone del salto, *allora* salta», «*Se* [tasto W] **O** [Freccia su] viene premuto, *allora* salta» sono solo alcuni esempi di proposizioni che regolano un videogioco. Per non parlare di tutta la struttura logica che sta dietro ad un gioco di calcio come FIFA o Pro Evolution Soccer, in cui lo scambio di battute tra i commentatori della partita avviene in tempo reale e il programma attribuisce una frase ad un commentatore scegliendola tra tanti commenti possibili.

I sistemi lineari. Il sistema tra due rette è alla base di videogiochi come Pong. Il computer muove la barra verticale di sinistra, mentre il giocatore ha il comando su quella di destra e deve riflettere la traiettoria di una pallina che vi arriva, dopo aver rimbalzato elasticamente su uno dei due bordi orizzontali (Figura 10). Il programma dovrà verificare ogni volta se la retta che rappresenta la traiettoria della pallina interseca o meno il segmento che rappresenta la barra verticale mossa dal giocatore.

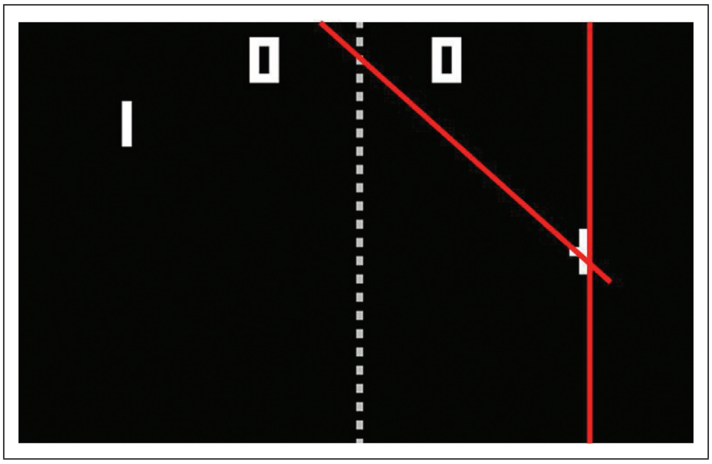
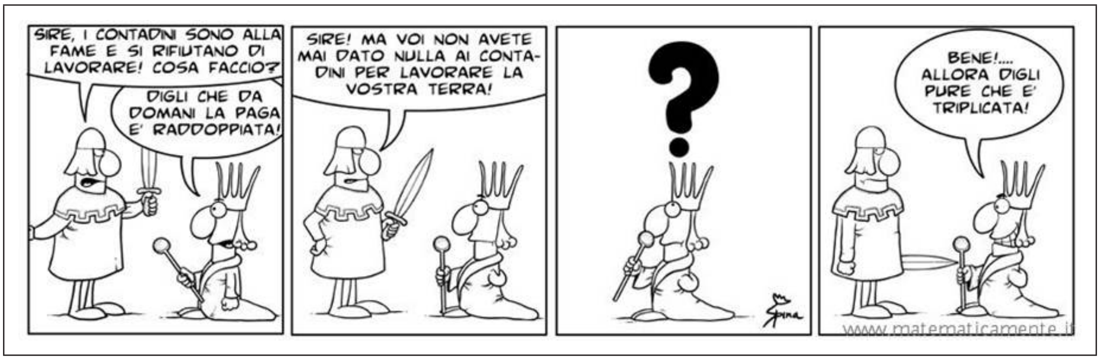


Figura 10 - La risoluzione di un sistema tra due rette è alla base del vecchio Pong (Pong, Atari; immagine utilizzata per fini didattici).

Il sistema binario. Per finire, non dobbiamo dimenticare che vediamo ciò che vediamo in un videogioco grazie ad una sequenza di 0 e di 1. I computer e le console da gioco «vedono», leggono e traducono comandi scritti nel sistema binario.

Concludiamo questa breve parentesi sulla matematica nei videogiochi prendendo in prestito una frase di Marco Mazzaglia, Video Game Evangelist alla Milestone: «*Senza la matematica non sarebbero esistiti i videogiochi. Quello che si sta studiando a scuola effettivamente entra a gamba tesa nel mondo dei videogiochi, perché quello che si sta studiando è la base su cui il videogioco viene costruito.*»

Conferenza triennio: "Che cos'è e a cosa serve la matematica?"



Questa presentazione ha lo scopo di mostrare agli studenti la matematica sotto una luce diversa da quella prettamente scolastica, affinché possano persuadersi del fatto che gli argomenti e i concetti, appresi o in corso di apprendimento, non sono fini a se stessi, bensì basilari in tantissimi ambiti. A partire dall'antichità, infatti, senza la matematica molte cose non esisterebbero affatto.

La sua accezione e definizione è cambiata nel corso dei secoli, e non è immediato dare una risposta alla domanda "*Che cos'è la matematica?*". Secondo il fisico, filosofo, astronomo e matematico Galileo Galilei, "la matematica è l'alfabeto nel quale Dio ha scritto l'universo". Per lo scrittore e drammaturgo austriaco Robert Musil "la matematica è una meravigliosa apparecchiatura spirituale fatta per pensare in anticipo tutti i casi possibili". Il matematico belga Georges Papy afferma che "il matematico è un poeta e la matematica è il suo sogno".

Un'affascinante metafora per spiegare che cosa sia per un matematico la matematica consiste nel paragonarla ad una farfalla, la cui trasformazione in crisalide ha inizio alla scuola primaria e secondaria, ma che completa il proprio sviluppo solo all'università. L'idea di matematica e l'approccio allo studio di questa disciplina sono molto differenti nei due stadi, come emerge da interviste condotte con studenti di scuola secondaria superiore e universitari (Figura 11). I primi possiedono una concezione della matematica come "un puro meccanismo" o "un insieme di regole, calcoli e teoremi che servono per risolvere problemi sempre più complessi" e ritengono che la matematica sia una costruzione perfetta e ormai terminata, chiedendosi se si possa ancora fare qualche scoperta in questa disciplina. Gli studenti che amano la matematica affermano comunque che non sanno a cosa potrà servire loro nella vita di tutti i giorni. È visibile una chiara differenza e crescita nelle affermazioni di un universitario che studia matematica. Per lui la matematica è "la scienza che spiega il perché delle cose", formando la mente ed esercitando la capacità di ragionare, e ancora essa è percepita come un insieme di teorie in cui si ritrova, giustificato, tutto quello che si è imparato negli anni precedenti alla scuola dell'obbligo.

Figura 11 – Differenti idee e concezioni della matematica alla scuola secondaria e all'università

Lo studio della matematica abitua al ragionamento e alla riflessione, stimola le capacità di intuizione e lo spirito di ricerca, sviluppa le capacità logiche e di astrazione, affina le capacità di sintesi, aiuta a descrivere e matematizzare la realtà nei suoi vari aspetti. La matematica ha profondi legami con l'arte, la musica ed altre forme espressive, altresì è una disciplina indispensabile per tutta la ricerca scientifica e tecnologica: la fisica, la chimica, la biologia, la medicina, l'economia, l'informatica, l'ingegneria.

La matematica permea il nostro universo. Esistono alcuni numeri, come il numero aureo, che sembrano essere alla base della struttura del cosmo, dal momento che li ritroviamo nella storia e misteriosamente presenti nelle leggi della natura che ci circonda. La *sezione aurea* di un segmento *AB* è la sua parte *AC* che risulta media proporzionale tra tutto il segmento e la parte restante (Figura 12). Il rapporto *AB/AC* è detto *numero aureo* e vale circa 1,618 (se troncato alle prime 3 cifre decimali).

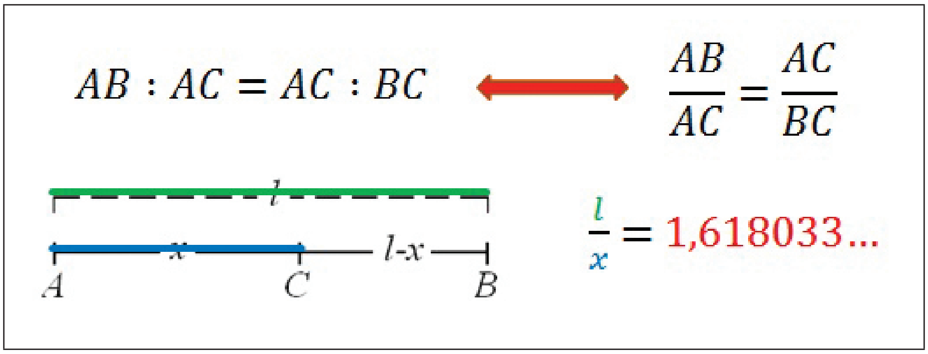


Figura 12 – Il numero aureo

Il numero aureo è una costante fondamentale nella storia e viene indicato con la lettera greca φ dall'iniziale di Fidia, il grande scultore ed architetto ateniese sotto la cui direzione fu costruito il Partenone di Atene. Egli infatti basò sul numero aureo le proporzioni del tempio (Figura 13) perché apparisse all'occhio umano esteticamente bello ed armonioso.

Figura 13 – Il rettangolo aureo nella facciata del Partenone

Fidia fondò i suoi calcoli sul rettangolo aureo, "inscrivendovi" la struttura del Partenone. Se si prende un rettangolo di dimensioni a e b, in modo tale che il rapporto a/b valga $\varphi \approx 1{,}618$, si ottiene un *rettangolo aureo* (Figura 14). Esso ha la seguente proprietà: eliminando il quadrato di lato b, si ottiene un rettangolo che è ancora aureo, perché il rapporto b su $(a-b)$ equivale nuovamente al numero aureo. Iterando questa costruzione si ottiene una successione di rettangoli aurei sempre più piccoli e, tracciando un quarto di cerchio in ogni quadrato scartato, si ottiene una linea che si avvolge su se stessa infinite volte: la *spirale aurea* o *logaritmica*.

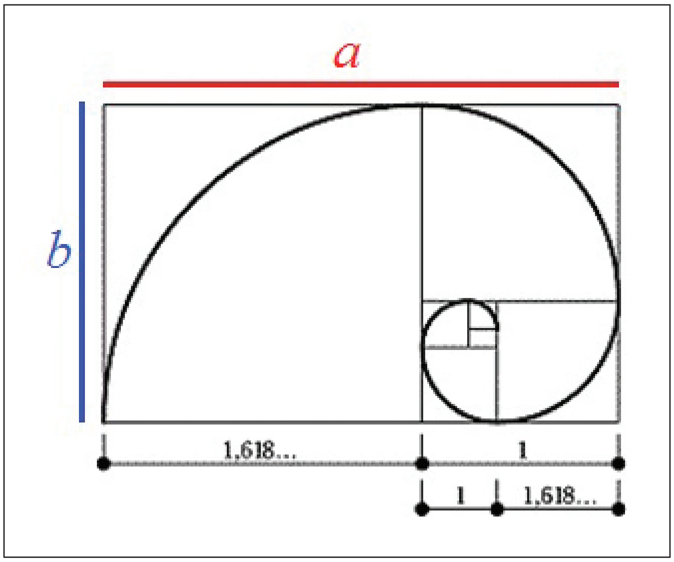


Figura 14 – Il rettangolo aureo e la spirale aurea

È sorprendente come la spirale aurea non si trovi solo nelle costruzioni dell'uomo, ma anche in esseri animali o vegetali presenti in natura. Uno dei classici esempi è il nautilus (Figura 15, a sinistra), un mollusco dei mari tropicali la cui conchiglia sezionata è una spirale aurea. Un altro esempio in natura è la disposizione dei capolini di una margherita (Figura 15, a destra): si osservano due famiglie di spirali, composte la prima da curve ruotanti in senso antiorario, la seconda da curve ruotanti in senso orario. In moltissimi casi i numeri di curve che compongono le due famiglie sono due numeri di Fibonacci consecutivi. Per esempio, in figura 15, si distinguono 34 spirali che ruotano in senso orario e 21 spirali che ruotano in senso antiorario. Inoltre, tale forma a spirale si ritrova anche in molte galassie.

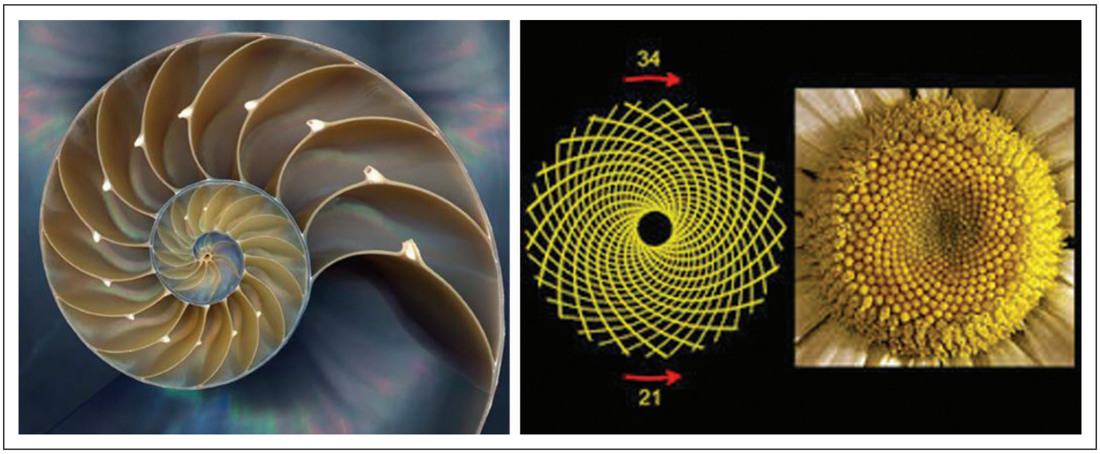


Figura 15 – Esempi in natura della spirale aurea

Secondo molti artisti dell'antichità, a partire dai greci, il rettangolo aureo è quello che più appaga il nostro senso estetico. Nei suoi studi anatomici, Leonardo Da Vinci stabilì che le proporzioni umane sono perfette quando l'ombelico divide l'uomo in modo aureo (Figura 16).

Figura 16 – L'uomo vitruviano di Leonardo Da Vinci

Abbiamo verificato, con pochi ma sorprendenti esempi, che la matematica è presente nella realtà che ci circonda. Ora però ci chiediamo: cosa si può fare con una laurea in matematica oggi? Quale può essere l'occupazione di un matematico? La figura del matematico oggi è sempre più richiesta in quei settori in cui si costruiscono modelli matematici, per studiare fenomeni reali, che permettano simulazioni e previsioni. Un modello matematico consiste nella descrizione di un fenomeno reale in termini di appropriate equazioni matematiche. Esso è basato su ipotesi il più possibile realistiche e le equazioni di cui è composto coinvolgono un gran numero di variabili e di parametri. In molti casi diventa impossibile ottenere una soluzione esplicita, espressa tramite una formula matematica. Per questo motivo si fanno ipotesi per semplificare il modello e si ricorre al calcolo di una soluzione approssimata e alla simulazione tramite computer. Questo accade nell'ambito della meteorologia, per esempio: le previsioni elaborate ogni giorno presso i centri meteorologici di tutto il mondo derivano dalla costruzione di modelli fisico-matematici. Un altro esempio è il campo della logistica e dei trasporti, dove si costruiscono modelli matematici per risolvere il problema dell'instradamento dei veicoli. Inoltre, nella finanza i matematici sono sempre più richiesti per adattare modelli matematici agli investimenti, alle analisi di mercato e al controllo del rischio.

Un'altra possibile identità del matematico, che sta prendendo sempre più piede in questi anni, è quella dell'informatico. Per l'elaborazione di immagini ai raggi X, la radiologia, la risonanza magnetica nucleare (RMN) e la scansione ad ultrasuoni, in campo medico e biomedico, alcuni metodi di acquisizione e trasmissione di immagini possono generare imperfezioni che un matematico può risolvere con opportuni algoritmi. Le aziende che producono soluzioni software, modulari o integrabili con le applicazioni del cliente, richiedono matematici nei loro team di informatici. L'obiettivo di un matematico in questi team può essere quello di studiare la teoria matematica su cui si basano i codici informatici acquistati dall'esterno, per riuscire a riprodurli all'interno dell'azienda, evitandone in futuro l'acquisto. La sicurezza informatica, inoltre, si avvale di alcuni protocolli di supporto in grado di criptare le comunicazioni e di garantirne l'autenticità. L'algebra dei codici e la crittografia sono quindi alla base della sicurezza informatica.

Uno studente laureato in matematica può inoltre intraprendere il cammino della ricerca, sia in matematica pura, sia in quella applicata. Per esempio esistono progetti di ricerca e sviluppo interdisciplinari che interessano la statistica applicata in altri campi come la biologia, la veterinaria e la medicina.

Per finire, c'è chi la matematica arriva ad amarla a tal punto che il suo obiettivo diviene quello di trasmettere questa passione agli altri e sceglie la professione di insegnante. Insegnare matematica è un compito non facile: infatti è necessario conoscere in modo molto approfondito la disciplina e la didattica della disciplina per sapere creare le condizioni affinché uno studente si appropri del linguaggio e del simbolismo matematico, si incuriosisca, si appassioni, si cimenti nei problemi.

A questo proposito, concludiamo con un estratto dal "Diario di scuola" di Daniel Pennac: *"Ogni studente suona il suo strumento, non c'è niente da fare. La cosa difficile è conoscere bene i nostri musicisti e trovare l'armonia. Una buona classe non è un reggimento che marcia al passo, è un'orchestra che prova la stessa sinfonia. E se hai ereditato il piccolo triangolo che sa fare solo tin tin, o lo scacciapensieri che fa soltanto bloing bloing, la cosa importante è che lo facciano al momento giusto, il meglio possibile, che diventino un ottimo triangolo, un impeccabile scacciapensieri, e che siano fieri della qualità che il loro contributo conferisce all'insieme. Siccome il piacere dell'armonia li fa progredire tutti, alla fine anche il piccolo triangolo conoscerà la musica, forse non in maniera brillante come il primo violino, ma conoscerà la stessa musica. Il problema è che vogliono farci credere che nel mondo contino solo i primi violini".*

CAPITOLO 5

Il "PLS": un piano di portata nazionale

Introduzione

Il "Piano Lauree Scientifiche" ha sviluppato, ad oggi, una così significativa portata nazionale che è sfociata nella necessità di riunire tutta la comunità PLS italiana (matematici, fisici, chimici e studiosi in scienze dei materiali), per la prima volta, in occasione del convegno scientifico sul PLS, svoltosi il 12 e il 13 dicembre 2013, presso la Città della Scienza di Napoli.

In questo capitolo mostriamo come il convegno sul PLS abbia rappresentato l'"appuntamento" essenziale per evidenziare, con i partecipanti, i punti di forza e di debolezza del piano, i collegamenti con il mondo della ricerca scientifica e la metodologia didattica comune adottata dal PLS. Nell'ambito di tale convegno sono state anche pianificate sessioni parallele per rendere visibili alla comunità le attività messe in campo nei vari poli italiani nel corso di questi anni. In particolare, riporteremo la configurazione attuale del PLS di Torino, frutto di recenti modifiche apportate per appianare alcune criticità rilevate negli anni precedenti.

La scelta della Città della Scienza come sede del convegno non è stata casuale. Infatti, la Città della Scienza è un'iniziativa di promozione e divulgazione della scienza gestita dalla Fondazione IDIS-Città della Scienza. Purtroppo, il museo scientifico interattivo è andato distrutto in un incendio la sera del 4 marzo 2013 e ha riaperto il mese dopo con mostre in alcuni spazi del complesso. I lavori di ricostruzione dell'ala distrutta sono a buon punto e, in aggiunta, è nato un cantiere di lavoro il cui progetto è quello di edificare una struttura del tutto nuova che affiancherà quella ricostruita.

Quindi, la decisione di tenere il convegno scientifico sul PLS proprio presso la Città della Scienza ha sottolineato il legame del Piano nazionale Lauree Scientifiche con un'istituzione fortemente coinvolta nello sviluppo della cultura scientifica e duramente colpita nel suo ruolo di promozione e diffusione della cultura.

Un po' di storia

Il "Progetto Lauree Scientifiche", oggi "Piano Lauree Scientifiche" (PLS) – modifica che ha segnato la necessità di passare dalla sperimentazione a una realizzazione di sistema – è nato nel 2004 nell'ambito della "Conferenza Nazionale dei Presidi della Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali" (Con.Scienze) allora presieduta da Enrico Predazzi (Professore emerito dell'Università di Torino e Presidente dell'Agorà Scienza). A quel tempo, la Con.Scienze ha preso atto delle problematiche che si stavano sviluppando in Italia legate al crollo delle iscrizioni ai corsi di laurea scientifici (in particolare, Chimica, Fisica e Matematica), che, tra il 1989 e il 2000, erano diminuite del 43%, 56%, 63% rispettivamente. Per questo, la Con.Scienze è intervenuta in maniera attenta, con l'appoggio efficace dell'allora Ministro della Ricerca e dell'Università, il quale, nel DM 198/2003 all'art. 4, prevedeva a partire dall'A.A. 2003 "…incentivazioni alle iscrizioni ai corsi di laurea in Chimica, Fisica, Matematica e Scienze dei Materiali" favorite dalla collaborazione tra MIUR e Confindustria, caldeggiata proprio dalla Con.Scienze.

In questi anni, dopo molti sforzi nell'ambito del PLS, coordinati da Nicola Vittorio (Coordinatore Nazionale per il MIUR del Piano Lauree Scientifiche e principale Organizzatore di questo convegno), assistiamo a notevoli miglioramenti. Il grafico (Figura 1) mostra il punto a cui si era scesi e quello a cui siamo arrivati oggi.

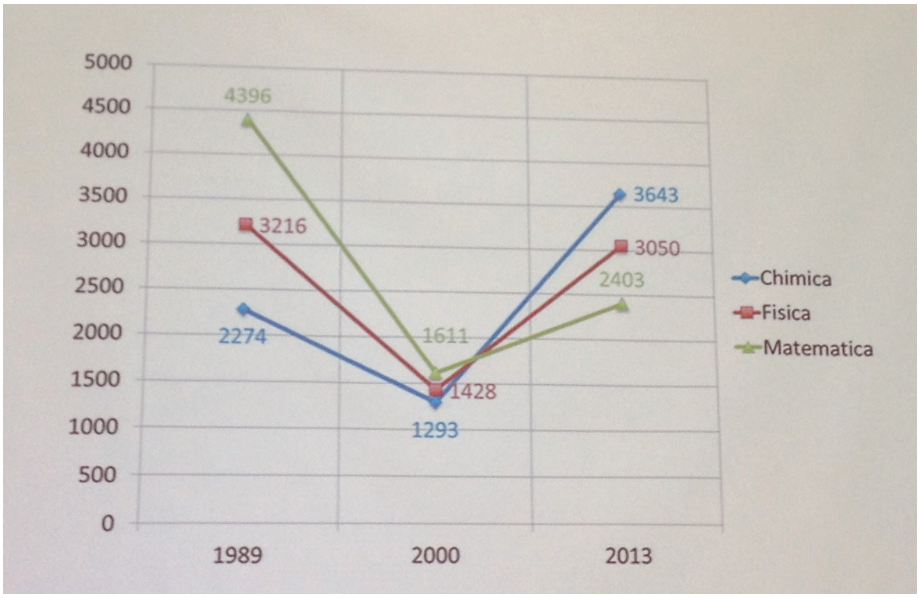


Figura 1 – Grafico dell'andamento delle immatricolazioni in Chimica, Fisica e Matematica

Nello specifico, per quanto riguarda Fisica la situazione è nella norma; Matematica è ancora in sofferenza; Chimica sembrerebbe andare molto bene, ma bisogna tenere conto del fatto che le iscrizioni a questo corso di laurea sono, per una percentuale corposa, delle preiscrizioni a Medicina, dato che Biologia è un corso a numero programmato in quasi tutti gli atenei. Sebbene il miglioramento sia sensibile (anche la crisi è stata un fattore di recupero per svariati motivi), ci sono ancora delle criticità; il problema non è risolto, trattandosi di una situazione temporanea, in quanto ciò che si è verificato 15 anni fa potrebbe ripresentarsi anche oggi. Quindi, l'invito è quello di non fermarsi ai risultati ottenuti, poiché la flessione delle iscrizioni non ha riguardato solo le discipline scientifiche, ma ha toccato l'Università nel suo insieme: in 10 anni, infatti, si sono persi 100000 studenti.

Obiettivi e punti di forza e di debolezza del Piano Lauree Scientifiche

Oltre ad incrementare gli iscritti ai corsi di laurea scientifici, gli obiettivi del PLS prevedevano:

- *di migliorare la conoscenza e la percezione delle discipline scientifiche nella Scuola secondaria di secondo grado, offrendo agli studenti degli ultimi tre anni di partecipare ad attività di laboratorio curriculari ed extra curriculari stimolanti e coinvolgenti;*
- *di avviare un processo di crescita professionale dei docenti di materie scientifiche in servizio nella Scuola secondaria a partire dal lavoro congiunto tra Scuola e Università per la progettazione, realizzazione, documentazione e valutazione dei laboratori sopra indicati;*
- *di favorire l'allineamento e l'ottimizzazione dei percorsi formativi dalla Scuola all'Università e nell'Università per il mondo del lavoro, potenziando ed incentivando attività di stage e tirocinio presso Università, Enti di ricerca pubblici e privati, Imprese impegnate in ricerca e Sviluppo.*

(tratto dalle "Linee Guida" del PLS, 2010)

Per ottenere un giudizio attendibile dell'andamento del PLS e per verificare se gli obiettivi prefissati erano stati effettivamente raggiunti o meno, si è fatto ricorso anche a valutazioni esterne al progetto. La prima, nel 2007, aveva lo scopo di misurare il cambiamento degli atteggiamenti nei confronti delle discipline scientifiche degli studenti che hanno partecipato al PLS; la seconda, nel 2010, ha interessato alcuni insegnanti di scuole secondarie di secondo grado, in termini di coinvolgimento degli studenti e di ricadute dell'esperienza PLS sul proprio insegnamento; la terza, nel 2013, presentata proprio in occasione di questo convegno e sotto riportata, propone una nuova analisi dei punti di forza e di debolezza della governance sul territorio tra scuole-università-imprese.

La lettura di questi tre documenti dà uno spaccato dell'evoluzione nel corso del tempo di quello che è successo. Dagli esiti di queste valutazioni sono emersi, quindi, punti di forza e di debolezza del PLS.

I punti di forza sono rappresentati dall'esistenza di una comunità PLS molto numerosa (composta di scuole, insegnanti e docenti universitari) e dall'utilizzo della metodologia del "laboratorio" sotto il duplice aspetto di metodo per l'insegnamento delle scienze sperimentali e di momento di sintesi fra la crescita professionale degli insegnanti e l'orientamento formativo degli studenti (si riporta sotto la tavola rotonda dedicata alla didattica laboratoriale).

Un punto di debolezza si riferisce, invece, alla sostenibilità del progetto: dichiarare che il PLS ha risolto il problema delle immatricolazioni è un'affermazione imprecisa, perché ci sono tuttora oscillazioni e difficoltà. Inoltre il PLS, come detto sopra, non si era posto, fin dall'inizio, il solo problema di incremento delle immatricolazioni, ma anche quello di un miglioramento dell'insegnamento delle materie scientifiche e, più in generale, della diffusione della cultura scientifica, in modo da "allenare" gli studenti ad avere "orecchio alla scienza".

Un altro punto di criticità è l'assegnazione dei fondi. Occorre, infatti, una maggiore continuità: è legittimo che, stanziando i fondi annualmente, sia difficile gestire le cose su scala pluriennale, ma, se un piano come il PLS non è visto in uno sviluppo almeno triennale, ci si ridurrà a decidere da un giorno all'altro quali sono i finanziamenti da assegnare e quale tipo di attività si intende promuovere per l'anno successivo. Oltre a ciò, esiste un problema di tempistica nell'assegnazione di questi fondi: se essi arrivano a metà anno scolastico, si escludono le scuole che già a settembre definiscono i loro piani dell'offerta formativa.

Si è notato, inoltre, che la partecipazione della scuola è stata più su base individuale che non di sistema. Questo problema deve essere superato e l'informazione e il coinvolgimento devono essere migliorati. Anche gli Uffici Scolastici Regionali (USR) devono essere maggiormente coinvolti o, per lo meno, ci deve essere una maggiore chiarezza del loro ruolo all'interno del PLS.

Un altro punto debole del piano è stato il coinvolgimento singolo del docente piuttosto che dell'istituzione scuola, dovuto alla non piena collaborazione dei dirigenti scolastici. Per ovviare a ciò, in Piemonte, la Matematica, ad esempio, già dallo scorso anno, ha puntato ad avere adesioni da parte non dei singoli docenti, bensì delle scuole.

Un'altra criticità è rappresentata dal mancato riconoscimento agli insegnanti che partecipano alle attività PLS. L'aspettativa iniziale, infatti, prevedeva di dare certificati di partecipazione agli insegnanti come riconoscimento della loro attività di formazione.

Infine, è stato problematico il raccordo tra università e mondo del lavoro. Infatti, si è riusciti a implementare il legame scuola e università, scuola e mondo del lavoro, ma non università e mondo del lavoro.

In questo convegno ci si propone di rendere visibile la comunità PLS e di discutere in maniera molto critica il passato per progettare in maniera efficace il futuro. È proprio per questo che le plenarie e le tavole rotonde di questo convegno sono state pianificate con lo spirito di mettere in luce, soprattutto, i punti di debolezza del PLS.

L'ultima valutazione del PLS

Anna Casaglia (Università di Milano-Bicocca)

Punti di forza e di debolezza della governance sul territorio tra scuola-università-imprese

È importante riportare l'esito dell'ultima valutazione dell'andamento del PLS ai fini di porre in rilievo lo stato dell'arte e gli eventuali approfondimenti di quanto sopra già anticipato.

Come già accennato, questa valutazione ha avuto lo scopo di fotografare l'esistente, mettendo in luce i punti di forza e di debolezza attuali della governance sul territorio tra scuola-università-impresa, ponendo, soprattutto, l'accento sui punti deboli ai fini di apportare opportune modifiche per il futuro.

Nello specifico, a partire dai risultati ottenuti dalle precedenti valutazioni, l'idea è stata quella di raccogliere tutte le componenti (scuola, università, impresa) che fanno parte del piano per metterle a confronto tra loro, allo scopo di avere una panoramica non soltanto a livello dei vissuti personali e delle ricadute sulle altre componenti, ma anche a un livello più alto di organizzazione e comunicazione fra le diverse componenti.

Entrando nello specifico, questa valutazione ha puntato a monitorare l'andamento del PLS, mettendo in luce i punti di eccellenza e di criticità riguardanti gli aspetti generali del progetto, ad affrontare in maniera più organica gli aspetti organizzativi dello stesso, ovvero la programmazione delle attività, il coinvolgimento dei colleghi e il ruolo dei dirigenti scolastici in un'ottica di coordinamento fra essi a livello regionale. Infatti, i Tavoli Regionali, coordinati a loro volta dagli Uffici Scolastici Regionali, sono stati visti come occasione di organizzazione e programmazione periodica e per questo sono stati uno dei "focus" principali di questa valutazione. Infine, si è voluto comprendere qual è il ruolo giocato dal mondo delle imprese all'interno del progetto.

La metodologia adottata per questa valutazione è stata la stessa di quella del 2010 e, quindi, di tipo qualitativo, attraverso interviste collettive fra i partecipanti, che si sono confrontati tra loro, puntando ad avere una visione corale senza, però, perdere di vista la ricchezza delle opinioni personali. I gruppi di lavoro erano molto numerosi ed erano formati da insegnanti, docenti universitari, referenti regionali, rappresentanti dell'USR e del mondo dell'impresa e referenti nazionali. Sono state condotte delle interviste su diversi temi principali, come i punti di forza e di debolezza del progetto, gli aspetti relazionali e gli aspetti organizzativi. In particolare, per quanto riguarda il primo punto si è chiesto se le motivazioni e la partecipazione che spingeva le persone a prendere parte al progetto fossero cambiate nel tempo o meno, anche rispetto agli obiettivi iniziali; si è chiesta una valutazione del progetto in termini di utilità personale e di ricaduta sugli studenti, una valutazione delle attività di laboratorio in generale e delle esperienze portate avanti nell'ambito del PLS; e infine, se e come il PLS può assumere un ruolo significativo nella scuola riformata. Dal punto di vista delle relazioni si era interessati a capire sia le condizioni di lavoro interno all'ambito della singola scuola (disponibilità fra colleghi e, per gli insegnanti, quella del dirigente scolastico), sia quello che succede tra scuola e università da un punto di vista relazionale e formativo, con lo scopo di capire se la comunicazione funziona e se la collaborazione è gestita bene o se si rilevano difficoltà.

Infine, dal punto di vista organizzativo era importante capire come funziona l'organizzazione della programmazione e il coordinamento del progetto, mettendo in luce eventuali problemi rispetto alle tempistiche e al coordinamento.

In generale, la valutazione è tendenzialmente molto positiva, soprattutto rispetto agli obiettivi e al successo del progetto rispetto alle motivazioni di partenza. In particolare, la ragione principale per cui i partecipanti continuano a lavorare nell'ambito del PLS è la volontà di diffondere la cultura scientifica tra gli studenti, coinvolgendo i ragazzi nello studio delle materie scientifiche. Questa motivazione appare più rilevante e diffusa rispetto a quella che riguarda l'incremento delle immatricolazioni alle materie scientifiche.

Come già messo in luce negli interventi precedenti, per ciò che riguarda gli insegnanti, l'assenza del ritorno economico o di altra forma di riconoscimento dei partecipanti a questo progetto è la fonte principale da cui si originano le criticità. Non è necessario che esso sia di natura economica; sarebbe auspicabile che fosse legato alla formazione obbligatoria o all'avanzamento di carriera della professione insegnante.

Dall'altra parte, gli studenti sono soddisfatti della propria esperienza PLS e, spesso, sono influenzati da essa nella scelta della futura formazione accademica. Tutti riconoscono il valore formativo, ma soprattutto il ruolo innovativo didattico del PLS: ciò che emerge, infatti, è il fatto che questa metodologia di lavoro dovrebbe integrarsi meglio con i curricoli scolastici e, quindi, si dovrebbe trovare un modo per integrare le esperienze del PLS all'interno della scuola in modo da non lasciarle distaccate dal percorso scolastico tradizionale. Inoltre, si propone una maggiore verticalizzazione delle attività non solo sul biennio ma, addirittura, sul quinquennio.

Per quanto riguarda gli aspetti organizzativi si è notato che l'attenzione da parte degli USR verso il PLS è andata diminuendo, con conseguente debolezza sul coordinamento e sulla comunicazione, aspetti che dovrebbero essere gestiti proprio da questi uffici. Questo ha inciso sulla programmazione, sulla valutazione e sulla partecipazione al progetto. I Tavoli Regionali sono stati convocati solo in occasione del rinnovo del PLS e non hanno svolto una funzione di programmazione partecipata e di scambio delle esperienze, limitandosi a comparse sporadiche in incontri puramente di natura formale per dare l'avvio alle attività. Infine, la partecipazione di Confindustria e le attività previste con le aziende rimangono, in alcuni casi (non il Piemonte), un elemento di debolezza.

In conclusione, il PLS continua ad entusiasmare i partecipanti che ne riconoscono indubbiamente l'utilità e il potenziale. La stanchezza di chi si dedica da anni a queste attività potrebbe comprometterne, però, il successo, ed è quindi necessario un intervento che permetta una maggiore istituzionalizzazione del progetto, un allargamento della partecipazione, un coinvolgimento maggiore degli USR, l'interazione reale con il mondo dell'impresa, delle forme di coordinamento locale che rendano più agevole la programmazione e l'organizzazione delle attività. Infine, i Tavoli Regionali andrebbero potenziati e dovrebbero tornare a svolgere il ruolo di coordinamento tra le diverse componenti, quello di "ponte" tra il MIUR e i partecipanti e quello di valutazione dell'andamento del PLS.

Il filo rosso (in)visibile che lega il PLS e la Ricerca Scientifica

Ferdinando Arzarello (Università di Torino)

La didattica della matematica nella dimensione europea

Il PLS e la ricerca in didattica della matematica

Il Professor Ferdinando Arzarello ha presentato alcuni cambiamenti di prospettiva nella ricerca in didattica della matematica non solo in Europa, ma più in generale nel mondo. Questi cambiamenti sono stati definiti slittamenti rispetto al focus generale delle ricerche in didattica della matematica e rispetto ad alcuni temi specifici come quello delle competenze degli insegnanti, della costruzione sociale del sapere e del ruolo dell'ICT (Information and Communication Technology) nell'insegnamento. Gli studiosi attribuiscono parte di questi slittamenti all'impatto degli studi comparativi (PISA, TIMSS) su ricercatori, insegnanti e politici. In questa plenaria, sono stati mostrati quattro esempi significativi per PLS e, in generale, per progetti istituzionali che mirano al miglioramento delle pratiche in classe e all'aggiornamento degli insegnanti. Ai fini di un inquadramento più appropriato dello spostamento del focus generale delle ricerche in didattica della matematica, si è partiti da un'indagine pubblicata nel 2005 nella rivista "Educational Studies in Mathematics" (ESM) a nome di A. Sfard, condotta anche da altre persone. Da questa indagine, che ha coinvolto 74 ricercatori in didattica della matematica, è emerso un quadro complesso dovuto alle diverse specificità degli stessi: infatti, alcuni di questi si dedicano solo alla ricerca, altri sono più interessati alla formazione e altri ancora lavorano sul curricolo. Lo scopo dell'indagine era quello di conoscere dai ricercatori coinvolti le relazioni tra la ricerca in educazione matematica e le pratiche di insegnamento della disciplina. Il risultato principale che è emerso è stato proprio uno slittamento progressivo del focus delle ricerche internazionali in didattica della matematica negli ultimi decenni, così definito: si è passati dal momento dell'attenzione al curricolo negli anni '60-'70, chiamato "era del curricolo", all'"era del discente" negli anni '70-'80, cioè ai processi di apprendimento, fino ad arrivare oggi all'"era dell'insegnante", cioè al momento dell'attenzione ai processi nell'insegnante, oltre che a quelli dei discenti in relazione al curricolo. L'indagine ha mostrato che l'accento non era più posto su cosa fosse insegnato in classe, ma su come era insegnato.

A questo proposito, Sfard (2005), afferma che: "*I consider the re-conceptualization of the relationship between the teacher and the researcher a big leap toward research that plays a genuine role in shaping and improving practice*" ("Considero la ri-concettualizzazione della relazione tra l'insegnante e il ricercatore un grande salto verso la ricerca che gioca un ruolo genuino nel formare e migliorare la pratica"). A partire da questa citazione, il relatore ha illustrato questo salto riguardo ai temi specifici di cui ha parlato all'inizio.

Si parte, allora, dalle competenze dell'insegnante: ci sono state e ci sono tuttora molteplici ricerche sulla cosiddetta "teacher education" che hanno cercato di mettere a fuoco le conoscenze necessarie per insegnare la matematica (Wood, 2008; Even & Ball, 2009). Un elemento comune a tutte queste ricerche è rappresentato dal fatto che le conoscenze necessarie per insegnare la matematica sono costituite da alcune componenti principali, che interagiscono o, per lo meno, dovrebbero interagire fra loro. Per capire quali sono queste componenti principali, si consideri un esempio tratto da un articolo di quei volumi citati sopra: si immagini di avere una riunione con insegnanti di matematica in cui si chiede loro come utilizzerebbero la domanda "è più grande 3/2 o 301/201?" (Wood, 2008), come punto di partenza di una loro lezione. La discussione con gli insegnanti evidenzia almeno tre elementi: le conoscenze matematiche, le conoscenze matematiche specifiche per l'insegnamento e le conoscenze pedagogiche. Nella discussione su queste conoscenze emergono in modo forte le credenze degli insegnanti. Questo quadro complesso in cui si intrecciano questi tre tipi di conoscenza è stato studiato e precisato, in particolare nell'ultimo decennio, grazie ad una elaborazione realizzata da D. Ball e altri (in particolare H. Bass) degli studi pioneristici di Shulman (Shulman, 1986) che costruì il concetto di "Pedagogical Content Knowledge" (PCK). Questi ricercatori sono pervenuti alla definizione di un complesso interrelato di conoscenze, noto come "Mathematical Knowledge for Teaching" (MKT) necessario all'insegnante nella sua pratica didattica e su cui oggi si concentrano molti studi in ricerca in didattica della matematica. Il PCK riguarda l'intreccio matematica-pedagogia in relazione alle differenti condizioni e modi con cui si insegna/si apprende un contenuto specifico. In particolare, Ball e Bass partendo da questi studi, propongono una caratterizzazione più fine e pratica della MKT, così definita: "la conoscenza matematica, le abilità, le abitudini mentali, le sensibilità che sono implicate nell'effettivo lavoro dell'insegnamento" e cioè "i compiti in cui gli insegnanti si impegnano giornalmente e le responsabilità che essi hanno nell'insegnare matematica sia in classe sia fuori di essa".

Ball e i suoi colleghi sottolineano la differenza fondamentale tra le conoscenze matematiche e quelle necessarie per l'insegnamento (Ball et al., 2008). Le prime permettono di comprimere l'informazione in forme astratte, mentre le seconde richiedono una specie di decompressione, che rende più esplicito il contenuto matematico. Ball e altri affermano: "*invece che partire dal curriculo o dagli standard per l'apprendimento degli studenti, noi studiamo il lavoro dell'insegnamento. […] Cerchiamo di scoprire i modi in cui la matematica si scontra con le esigenze di* *insegnamento che si manifestano regolarmente giorno per giorno, momento per momento. Le nostre analisi permettono di fondare una teoria della conoscenza matematica per l'insegnamento basata sulla pratica*". Questo potrebbe essere familiare se si pensa alle attività che si svolgono nel Piano Lauree Scientifiche. Bass sottolinea che la "Specialized Content Knowledge" è conoscenza matematica in senso stretto, di cui gli insegnanti validi hanno bisogno e che utilizzano; eppure essa non è generalmente patrimonio conoscitivo dei matematici professionisti. Contrariamente alla credenza diffusa, la parte matematica di MKT non è un sottoinsieme di quanto sanno i matematici. È qualcosa di diverso e, senza un'attenzione specifica dedicata esplicitamente a questo fine, può non rientrare a far parte dell'istruzione impartita nei corsi per insegnanti nei dipartimenti di matematica" (Bass riferisce questo pensiero ai dipartimenti di matematica americani).

Riguardo al secondo tema specifico della costruzione sociale del sapere, un elemento fondamentale che caratterizza i principali studi sulla formazione degli insegnanti è lo studio di come essi possano essere coinvolti nell'analisi condivisa e scientifica delle principali caratteristiche dei progetti didattici. Tale metodo si è affermato sempre più nelle ricerche di questi ultimi anni. Esso è descritto nella letteratura mediante la caratterizzazione di alcune modalità di lavoro degli insegnanti quando la loro attività sia di progettazione sia di lavoro quotidiano in classe si configura come quella di una comunità di pratica o addirittura di una comunità d'indagine. La pietra angolare di questi studi è la nozione di "riflessione critica", intesa non solo come un'attitudine fondamentale da suscitare negli insegnanti, ma anche come responsabilità professionale. Un punto chiave non è solo quello di suscitare questa riflessione, ma di condividerla con colleghi e ricercatori. B. Jaworski nel 2006 ha affermato: "*credo che l'uso dell'indagine come strumento può portare a sviluppare l'indagine come un modo di essere, quando è praticata come parte di una comunità, in cui i membri collaborano, come persone che apprendono per sviluppare la loro pratica*". Questo, essendo diventato oggetto di ricerche attuali, si può auspicare sempre più per le comunità di pratica all'interno del PLS, in cui matematici, fisici, chimici e studiosi in scienze dei materiali spesso non comunicano tra loro. Tali ricerche suggeriscono che gli insegnanti possono acquisire un'attitudine alla riflessione critica, esplicitando e condividendo le personali interpretazioni degli atti didattici prodotti (ad esempio, rivedendosi nei video registrati mentre insegnano).

Un altro aspetto importante è la componente istituzionale, messa già in luce negli interventi precedenti. Essa, infatti, ha una forte influenza sul modo in cui si sviluppano i processi: i vari progetti/proposte/lavori assumono un significato per l'insegnante in quanto si situano all'interno di un contesto istituzionale ben preciso. Questo è stato studiato dalla scuola francese, ad esempio da Y. Chevallard che afferma che "*un oggetto [matematico] esiste dal momento in cui una persona o una istituzione riconosce questo oggetto come esistente (per esso)*" (Chevallard,1992).

Passando, infine, al terzo tema specifico, il ruolo dell'ICT nell'apprendimento, si assiste ad una evoluzione dei "focus" di ricerca sul ruolo delle tecnologie nell'insegnamento della matematica. Anche in questo campo c'è stato uno slittamento molto interessante tra varie "ere": si è partiti dalla 0.i, quella dei linguaggi di programmazione, degli anni '80-'90, alla 1.i, quella dei software dedicati, ad esempio i Dynamic Geometry Software (DGS). Essi sono quelli che gli studiosi chiamano infrastrutture rappresentazionali (RI) (infatti, nei software di geometria dinamica si trovano rappresentate delle cose di geometria, dei "pezzi" di algebra, di analisi e così via). Fino ad arrivare oggi all'era 2.0, in cui le ICT sono viste come infrastrutture rappresentazionali e di comunicazione (CI). Questi tipi di infrastrutture si inseriscono in un contesto multimodale. Ad esempio, Hegedus e Moreno Armella (2009) affermano che "quando le RI e le CI interagiscono in un contesto educativo, si ha un'evoluzione e un ampliamento dei significati che le tradizionali forme di espressione così trasformate supportano. Si ha un incremento di quella che si chiama espressività rappresentazionale: da un lato si usano i supporti garantiti dal software; dall'altro le nuove strutture mettono in grado i discenti di esprimersi in modo "naturale" attraverso atti linguistici (ad es. metafore, deissi) e azioni fisiche (ad es., gesti e movimenti del corpo)…Tali ambienti, inseriti in attività curricolari che siano matematicamente significative (in tali contesti) permettono di affrontare opportunamente i profondi e problematici nodi motivazionali che i resoconti scientifici riportano (Nat.Res. Council, 2003) e che riguardano l'alienazione e la marginalizzazione di molti allievi rispetto all'andamento delle attività in classe".

Gli studenti coinvolti nelle attività PLS lavorano esattamente nel modo descritto sopra da Hegedus e Moreno Armella.

Affinché le pratiche didattiche in classe producano vantaggio a tutti gli studenti è necessario che il focus dei progetti si centri sugli insegnanti e sulle loro pratiche, mediante lo sviluppo di comunità di pratica e l'evoluzione di queste in comunità di indagine. Ciò si sta verificando in PLS, infatti queste comunità di pratica spesso lavorano in laboratorio, intrecciando, ad esempio, fisica e matematica.

È importante che tali comunità si costituiscano tramite l'elaborazione concreta di specifiche conoscenze relative alla "Mathematical Content Knowledge": alla effettiva realizzazione di tali programmi contribuiscono sia componenti interne (le discipline, gli insegnanti) sia componenti esterne (i ricercatori, le istituzioni).

L'introduzione delle ICT e lo stesso uso del laboratorio, che pure sono essenziali per supportare il cambiamento, rischiano di avere uno scarso risultato se gli insegnanti non sono effettivamente coinvolti come co-progettisti, che inseriscono tali strumenti e metodi in strategie didattiche esplicite e condivise. Inoltre, a questo proposito, è importante essere sincronizzati con la storia e quindi con la terza era delle ICT.

Una cruciale riflessione generale, che emerge da un'analisi sia pur parziale dei lavori in didattica della matematica, è la necessità di un ingrandimento di scala dove i ricercatori possono e devono avere un ruolo, ma, per fare ciò, è necessaria l'interazione con le istituzioni. Sicuramente, le pratiche di una valutazione diffusa e sistematica (i test INVALSI più che PISA e TIMSS) hanno favorito tali processi. Qualche supporto è stato dato anche con progetti come PLS, M@t.abel e altri.

Hoyles sostiene che, per avere successo nei programmi di passaggio dalla piccola scala della ricerca alle grandi scale dei progetti nazionali, sono necessarie infrastrutture per lo sviluppo continuo della professionalità-insegnante, tese ad assicurare che la loro formazione sia intrecciata con questi programmi di scaling up. Anche in questo ci sono sporadici segnali dal MIUR (ad esempio, i Master per Formatori in Didattica della Matematica, Fisica…). Quello che si propone, in questa sede, è se il PLS possa pensare a una sua evoluzione proprio in questo senso.

Marisa Michelini (Università di Udine)

Ricerche in didattica della fisica che contribuiscono alla pratica scolastica e allo sviluppo professionale degli insegnanti

Il PLS e la ricerca in didattica della fisica

La Professoressa Marisa Michelini ha introdotto il suo intervento, sottolineando che un'integrazione qualificante tra il PLS e la ricerca in didattica è già stata sperimentata e ha prodotto i suoi effetti positivi. Le ricerche in didattica della fisica e della matematica hanno molti punti di contatto.

Da un progetto europeo ("Science Education Curriculum Research"), che si è da poco concluso, è emerso che con l'aumentare dell'età degli studenti cala il loro interesse di essi per la matematica, scienze e tecnologia, cosa di cui gli insegnanti non sono consapevoli. Il problema esistente è che, in campo scientifico, si ravvisa una carenza nella cultura di base dei cittadini, vi sono visioni mistificate della scienza, purtroppo largamente diffuse anche ad alti livelli sociali. La scienza viene considerata una disciplina deterministica e totalizzante che ammette soltanto un mondo misurabile e prevedibile mediante difficili strumenti formali, accessibili soltanto alla comunità "eletta" degli scienziati. L'educazione scientifica, quindi, diventa un'emergenza di livello internazionale. Si sta pagando la scarsa attenzione prestata agli aspetti didattici nell'insegnamento della fisica. Spesso, infatti, essa è stata insegnata nello stesso modo in tutte le scuole e a tutti i livelli scolari: si sono privilegiati i risultati piuttosto che i processi, si sono utilizzati i modelli fisici in contesti astratti ideali, senza dare esperienza del modo in cui si rendono utili a partire dal reale e, infine, non si è quasi mai data esplicitazione al processo di formalizzazione che fa "sposare" la fisica con la matematica. La fisica è percepita come una disciplina che parla di cose che non esistono (il punto materiale, il gas perfetto…), mediante leggi difficili che non si sa quando utilizzare. La bellezza, l'utilità e il vasto impiego della disciplina non emergono.

Si deve, quindi, operare una revisione dei contenuti e dei metodi nella didattica scolastica, non considerando i saperi disciplinari come statici e definitivi, ma in progressiva e continua evoluzione, senza separare il processo dal prodotto. Infatti, oltre al sapere dichiarativo (che cosa) e al sapere procedurale (come) esiste un sapere che pone e risolve problemi (per). Come già come messo in luce in questo convegno, per la formazione e l'apprendimento si devono mettere in atto strategie per produrre il cambiamento concettuale, dal senso comune al sapere strutturato, dal curriculum guidato alla responsabilità della scelta.

Le difficoltà di apprendimento sono legate al mancato raccordo tra l'esperienza quotidiana e gli apprendimenti scientifici. Queste difficoltà hanno spostato l'attenzione di ricerca dall'insegnamento ai problemi cognitivi di apprendimento. Dalle ricerche, sappiamo che, in base all'"idea" di una realtà nei singoli e nei gruppi, si costituiscono delle rappresentazioni rilevanti per relazionarsi con essa, riconoscere e comprendere le azioni. L'immagine di un contesto definisce le aspettative di chi si rapporta con esso a tutti i livelli e, soprattutto, orienta le scelte. Per questo motivo è importante offrire ai giovani esperienze metodologicamente diverse e riferite a diverse realtà di educazione scientifica. Questo è il vero orientamento, senza affermare che non si fa orientamento considerando gli aspetti psicologici, pedagogici, ma è indispensabile che ci sia un orientamento centrato sui contenuti, così come per ciò che riguarda il "Pedagogical Content Knowledge" esiste un orientamento derivato dall'esperienza di che cosa vuol dire trattare e affrontare certe problematiche.

La prospettiva di ricerca nell'innovazione significa porre attenzione agli approcci nei contenuti disciplinari (Fischer 2005) per identificare le strategie di cambiamento concettuale (Vosniadou, 2008), ripensare ai contenuti in termini problematici (Fensham, 2001), ricostruendoli in prospettiva educativa, svolgere ricerche empiriche sui ragionamenti dei ragazzi e mettere in campo Ricerca-Azione in una dialettica collaborativa tra scuola e università, che è proprio l'obiettivo cardine del PLS.

Nell'ambito di un altro progetto, il GIREP ("Groupe International de Recherche sur l'Enseignement de la Physique"), si è cercato di rispondere alla domanda "Perché focalizzarsi sui contenuti invece che sui soli metodi?". Le risposte seguenti, date da ricercatori a questa domanda, forniscono un quadro significativo e completo: la didattica di una disciplina è Educazione Scientifica, perché, come scritto molto bene nei nostri curricoli, ma, purtroppo non attuato, portare esperienza dei modi in cui si impara in un certo campo costituisce proprio il costruire l'educazione scientifica; l'apprendimento è legato a specifici contenuti, quindi non possiamo occuparci solo della ricerca pedagogica sul lavoro di gruppo o sul ruolo del compito a casa che non entrano nel merito della disciplina; si deve migliorare la pratica didattica con la ricerca. Inoltre, si deve promuovere la ricerca sulla struttura dei contenuti, perché anche la ricerca in didattica della fisica ha rilevato che la maggior parte dei fisici non ha riflettuto a sufficienza sugli aspetti concettuali che stanno dentro alla disciplina per farne qualcosa di insegnabile; infine, esplorare i processi di insegnamento/apprendimento per nuovi argomenti è uno dei compiti più importanti.

Anche ricerche in didattica della fisica, come quelle in didattica della matematica, propongono all'insegnante test da sottoporre ai suoi studenti. Si chiede, quindi, all'insegnante, che cosa si aspetta da questi test, quale tipo di risposta attende dai suoi studenti e quali, poi, ha effettivamente ottenuto. Quello che emerge è che conta il ragionamento che sta dietro alla risposta, perché non interessa il risultato, ma il processo, cioè l'individuazione del percorso di ragionamento da elaborare per farlo evolvere verso quello scientifico a partire da quello comune.

Quindi, i tipi di ricerca, che si stanno implementando in didattica della fisica a livello internazionale, sono focalizzati sui percorsi di insegnamento/apprendimento, sulla DBR ("Design Based Research"), cioè su come progettare, a partire dalla pratica didattica e dall'operatività, le modificazioni del modo in cui certi argomenti vengono insegnati.

Non si può insegnare la fisica che è scritta nei libri di testo, perché è consolidato, da tutta la ricerca internazionale, che il modo in cui impariamo non è il modo in cui sappiamo. Dunque, se si insegna facendo leggere o utilizzando i libri come base per il processo di apprendimento, non si riuscirà a far sì che lo studente si appropri dell'apprendimento stesso. Inoltre, si fallirà nel costruire una conoscenza più evoluta a partire dalla conoscenza comune. La conoscenza comune si costituisce sullo stato di evidenza e si caratterizza perché non è aperta a confutazioni, è formulata in termini vaghi, è costituita da termini divergenti e non correlati, è frammentaria anche se vi sono isole di coerenza. Ciò di cui si ha bisogno, quindi, è di fare sviluppare ai ragazzi il loro ragionamento e, a questo proposito, l'errore è sempre un buon indicatore: esso non va stigmatizzato, ma compreso in relazione a quale modello di ragionamento si sta applicando, a quale processo di evoluzione del ragionamento si sta assistendo e a quali difficoltà concettuali si va incontro. I nodi concettuali nascono da ragionamenti di senso comune; non esiste una descrizione senza un'idea interpretativa (nella didattica tradizionale, invece, si puntava, sin dall'inizio, sull'osservazione e descrizione) e lo studente, quindi, deve partire da dove si trova e evolvere il suo ragionamento verso quello scientifico.

Dalle ricerche in didattica della fisica emerge che la conoscenza scolastica e i ragionamenti naturali, spesso, coesistono nello stesso territorio. Esistono, inoltre, "angoli strategici" dai quali la conoscenza di senso comune interpreta la fenomenologia, mediante chiavi interpretative, che emergono in termini operativi per un gran numero di contesti fenomenologici (attrito, linee di campo…). Quindi, si devono trovare questi "angoli di attacco", senza rafforzare le idee ingenue, di senso comune e il linguaggio approssimato.

Ad esempio, la pressione si definisce come il rapporto tra forza e superficie. Questo è corretto, ma, allora, come si risponde a un ragazzo che considera un punto A in cui c'è la stessa pressione del punto B e chiede quale sia la superficie in questo caso?

Per evitare questi ostacoli, non si può fare del riduzionismo, ma si deve procedere a una ricostruzione concettuale della disciplina.

La metodologia didattica del "Laboratorio"

Una delle tavole rotonde del convegno è stata dedicata al ruolo della modalità didattica di "laboratorio" o "Inquiry Based Science Education" (ISBE) , motore chiave dell'attività del PLS. Riportiamo, a titolo esemplificativo, alcuni interventi di ricercatori a proposito di questo punto. Il sentimento generale che emerge è che questa metodologia di lavoro dovrebbe diventare caratterizzante della didattica curricolare, evitando così di considerarla solo un evento occasionale proprio delle attività costruite nell'ambito del PLS.

Domingo Paola (Liceo Issel, Finale Ligure, membro della CIIM)

Già negli anni '70, Lucio Lombardo Radice, convocato da un centro educativo per discutere su quali fossero le tendenze dell'insegnamento/apprendimento della matematica, fece questa raccomandazione al centro: "Raccomando moltissimo al Centro che ci sia uno stretto legame non soltanto tra matematica e osservazioni scientifiche, ma anche tra matematica e laboratorio tecnico…".

Per il relatore, non si trattava solo di una pura e semplice indicazione su come utilizzare gli strumenti concreti della matematica, bensì di una presentazione esplicita e seria del laboratorio di matematica, dove gli studenti sono coinvolti in un processo di costruzione di un prodotto, in cui ciò che conta non è questo quanto il processo attraverso cui vi si perviene. Il PLS ha fra i suoi obiettivi espliciti quello di definire il concetto di laboratorio di matematica e di studiare come questo possa incidere sull'insegnamento/apprendimento e nella prassi didattica quotidiana.

Il laboratorio di matematica è definito come "un contesto di insegnamento-apprendimento volto alla costruzione di significati, in cui si utilizzano nuovi e vecchi strumenti, che deve favorire sia la comunicazione e la discussione fra pari e quella fra studenti e insegnante, sia l'avvio graduale al sapere teorico come contesto in cui situare e dare risposte a domande del tipo perché è così? e che cosa succederebbe se…?".

Il ruolo fondamentale è quello dell'insegnante, cioè egli deve "prestare gli occhi" allo studente in modo che questi possa vedere "da matematico" i fenomeni che osserva. È l'insegnante il garante della transizione da un apprendimento percettivo-motorio ad uno costruttivo-simbolico.

Nonostante le tante indicazioni in merito al laboratorio di matematica, la didattica laboratoriale rischia di rimanere a scuola del tutto marginale. Questo è imputabile a diversi fattori: la frammentazione del sapere in materie, l'eccessiva attenzione agli aspetti burocratico-formali, l'orario ridotto delle singole materie che è una conseguenza diretta della frammentazione del sapere in materie.

I temi disciplinari e interdisciplinari che sono stati considerati nelle attività del PLS hanno portato a migliorare complessivamente sia le competenze di base degli studenti sia quelle degli insegnanti, coinvolti nel lavoro di co-progettazione con i docenti universitari. Sicuramente, grazie a queste attività, è cambiata l'immagine della matematica, vista come una disciplina di forte impatto culturale.

I contenuti delle attività PLS sono strettamente legati a quelli innovativi delle indicazioni curricolari, come ad esempio la probabilità e la statistica, che al di fuori delle attività PLS, sono ancora alquanto sacrificate. Il problema è che la didattica laboratoriale rischia di non essere implementata a scuola e, quindi, l'impegno è di far rientrare le attività PLS (caratterizzate proprio da questa metodologia di lavoro) nella didattica curricolare, che, spesso, invece, è vista come una prassi di addestramento più che di apprendimento. Per fare ciò è necessaria una diversa organizzazione del tempo-scuola, dando più spazio alle discipline scientifiche, per non rischiare un investimento a basso rendimento. Inoltre, servono più risorse e la certezza di avere queste risorse per poter programmare a lungo termine.

La co-progettazione è risultata positiva, non solo per quanto attiene al laboratorio, ma in generale per la co-progettazione tra insegnanti di scuola secondaria e docenti universitari. Gli insegnanti di scuola secondaria hanno, infatti, un'occasione preziosa per svolgere attività di formazione in servizio. Spesso, le attività di PLS sconfinano in qualcosa che è simile alla ricerca e, quindi, diventano l'attività di formazione in servizio più significativa.

Concludendo, il PLS non dovrebbe essere una delle tante attività aggiuntive che si svolgono a scuola, ma, purtroppo, rischia di diventare tale in mancanza di investimenti forti e di una mancata disponibilità e capacità dei docenti di soddisfare i bisogni educativi di tutti gli studenti, comprendendo sia le eccellenze che gli studenti in difficoltà. In questo modo, si dà a tutti la possibilità di ottenere le "competenze di cittadinanza", cioè la capacità di esercitare il pensiero critico nel mondo reale.

Potrebbe, infine, essere utile nell'ambito del PLS verificare se le tecnologie di apprendimento a distanza possano favorire l'apprendimento in presenza.

Donata Marasini (Università Milano-Bicocca)

La statistica è entrata nel PLS nel 2008 affiancando la matematica, mentre è diventata co-protagonista dal 2009-2010. Il progetto, infatti, ora si chiama "Matematica e Statistica". Il numero di atenei ad aderire a questo progetto è andato progressivamente aumentando fino a raggiungere oggi il numero di 14-15.

È importante che la statistica entri come la matematica nelle scuole, in modo tale che lo studente riesca a interpretare in maniera critica la marea di dati che quotidianamente gli vengono proposti.

Purtroppo, fino ad ora, l'ingresso della statistica nelle scuole è stato sofferto, quindi la co-progettazione si è rivelata molto vaga e isolata, senza conseguire i risultati attesi.

Per quanto riguarda i laboratori, invece, essi hanno avuto molto successo, risultando essenziali per la statistica. In quasi tutti gli atenei, infatti, si sono svolte indagini, per fare le quali si sono costruiti questionari significativi, grazie a figure di supporto, usufruendo poi di laboratori veri e propri, in cui gli informatici hanno mostrato il funzionamento dei software. Infine, raccolti i dati coi questionari, è ricomparsa la figura dello statistico per spiegarli, sintetizzarli e ricavarne le dovute informazioni.

Chiara Schettini (DDSCI – Divisione Didattica)

L'approccio PLS ha una forte componente laboratoriale, ma l'"Inquiry Based Science Education" in senso stretto (che è stata raccomandata dalla Commissione Europea già nel 2007) è un qualcosa di un po' diverso, perché richiede una specifica formazione degli insegnanti, un'abitudine degli studenti a lavorare in modalità investigativa e non può innestarsi "tout court" su un impianto didattico tradizionale. Quindi, è importante aver spinto sul laboratorio, ma se vogliamo promuovere in futuro l'IBSE soprattutto nei livelli della scuola primaria o secondaria di primo grado (terreni favorevoli su cui applicarla), è importante che ci si ponga il problema di una formazione specifica dei docenti rispetto a questo tipo di metodologia di laboratorio, in sinergia con altri soggetti erogatori di formazione (INDIRE, MIUR, Associazioni disciplinari).

Per quanto attiene al rapporto tra il PLS e le nuove Indicazioni Nazionali, le attività PLS sono basate su temi sia disciplinari sia interdisciplinari, accolti molto positivamente sia da docenti sia da studenti. Esse riescono a migliorare effettivamente le competenze in ambito scientifico quando il docente trasferisce la metodologia laboratoriale nelle proprie attività curricolari e, quindi, la fa propria rendendola sistematica e quando le attività PLS sono state costruite seconde le nuove indicazioni nazionali insieme al docente stesso.

Le esperienze riuscite di co-progettazione delle attività sono uno dei punti forti del PLS. Essa ha reso possibile un'osmosi di esperienze tra scuola, università e mondo del lavoro. La sfida comune è la costruzione di percorsi che sviluppino competenze scientifiche trasversali e disciplinari attraverso sequenze di insegnamento/apprendimento in cui sia possibile passare dalla dimensione informativa e di semplice trasmissione di nozioni a quella formativa generatrice di comprensione dei fenomeni e dei linguaggi scientifici per tutti gli allievi e di conseguenza, orientare "nel tempo" la motivazione alla scelta del Corso di Studi.

Infine, la relatrice ha proposto un modo affinché il PLS diventi un motore di ricerca ed innovazione "all'interno" delle scuole e non una semplice attività aggiuntiva; per fare ciò, è necessario accompagnare i corsi di formazione per gli insegnanti con un costante supporto alla sperimentazione e all'innovazione della didattica "in itinere" e "nelle scuole". Per questo, i fondi PLS dovrebbero essere orientati a finanziare progetti di "ricerca didattica" e di "applicazione di metodologie didattiche" dentro le scuole.

Il fine è quello di contemplare la didattica laboratoriale nel processo di formazione dei docenti, da quella iniziale (Lauree Magistrali, TFA…) a quella in itinere e aggiornamento, fino all'avvio di nuclei locali di sperimentazioni /ricerca didattica scuola-università.

La relazione tra le finalità del PLS e il problema delle verifiche

Il problema delle verifiche sta diventando sempre più pressante perché, se è vero che si deve cercare di diffondere il più possibile la cultura scientifica tra la popolazione, è anche vero che ci si deve assicurare un livello di apprendimento sufficiente in base a certi standard. Questo problema è quello che si sta cercando di risolvere con la questione della valutazione che in Italia è nata in ritardo rispetto ad altri paesi. Quindi, in Italia, si è privilegiata la diffusione piuttosto che la qualità dell'apprendimento. Ci si è chiesti che relazione intercorre tra il problema delle verifiche e dell'autovalutazione e le finalità del PLS.

Gabriele Anzellotti, coordinatore nazionale del PLS per matematica e statistica e responsabile del progetto "Autovalutazione e verifica", ha affermato che esistono diversi tipi di test e diversi utilizzi degli stessi. Si individuano almeno quattro finalità di questi test: il verificare le conoscenze richieste per l'accesso ai corsi di laurea, la formazione della graduatoria per l'accesso ai corsi di laurea a numero programmato, l'autovalutazione e la diagnosi per la valutazione formativa e, infine, il rilevamento delle conoscenze di una popolazione. Il Piano Lauree Scientifiche costruisce, propone e utilizza i test per tutte e quattro le finalità indicate, ma, per il PLS, i test non sono un obiettivo primario, bensì uno strumento di comunicazione fra università e scuola che può e deve essere usato per migliorare la qualità e l'efficienza del sistema scuola-università, in particolare nella filiera scientifica.

I test si devono utilizzare per stimolare un maggiore impegno da parte degli studenti e per raggiungere una migliore preparazione per l'università, per stimolare la riflessione degli insegnanti sulle conoscenze degli studenti al termine della scuola, sui contenuti e sulle modalità della didattica e, infine, per accrescere la consapevolezza dei docenti universitari sulle conoscenze degli studenti all'ingresso dei corsi di laurea, stimolandone la riflessione sui contenuti e sulle modalità della didattica universitaria.

Tutto questo richiede moltissimo lavoro oltre ai test stessi. Per realizzare questo completamento dell'azione dei test e migliorare la didattica, la qualità dei docenti, l'impiego e i risultati degli studenti, è previsto che si attuino i laboratori di autovalutazione previsti dalle Linee Guida PLS del 2010. Esse sono, a loro volta, in attuazione del decreto sull'orientamento, DM 21/08 (Legge 1/07). In queste linee guida si afferma che "i laboratori di autovalutazione per il miglioramento della preparazione richiesta dai corsi di laurea scientifici offrono agli studenti occasioni di affrontare problemi e situazioni di apprendimento che si possono incontrare all'università e li stimolano a riflettere sulla propria preparazione, nonché a completarla, se necessario, con la guida dei docenti, attraverso materiali didattici specifici e percorsi individuali".

I test sono uno strumento delicato; si vuole che il loro utilizzo produca gli effetti voluti e non produca effetti indesiderati o dannosi, da analizzare e calibrare con attenzione e rigore. Per studiare, progettare e analizzare i test e sperimentare e valutare le attività di autovalutazione, il PLS ha costituito, al suo interno, una specifica azione trasversale nazionale, l'"Autovalutazione e verifiche", presso il coordinamento nazionale dell'area matematica e statistica. In molti atenei, che sono sedi di progetti PLS, si realizzano laboratori di autovalutazione, generalmente collocati presso il progetto locale di matematica e statistica, con la collaborazione delle altre aree. Il numero di questi laboratori è sempre in aumento.

Il PLS insieme alla Con.Scienze, con il contributo importante della CRUI ("Conferenza dei Rettori delle Università italiane") e il supporto del MIUR, realizza dal 2009 un coordinamento delle prove di verifica delle conoscenze richieste per l'ingresso ai corsi di laurea. Le prove sono previste dal DM 270/04 e sono diverse da quelle per l'ingresso a corsi a numero programmato. Se la verifica non è positiva, agli studenti sono assegnati obblighi formativi aggiuntivi da assolvere entro il primo anno di corso, potendosi comunque immatricolare. Questi test hanno uno struttura modulare che prevede un modulo "mat_base" di linguaggio matematico e di modellizzazione, composto da 25 quesiti e obbligatorio per tutti e un modulo "sci_base" di scienze di base, composto da 50 quesiti suddivisi nei seguenti sotto-moduli disciplinari: biologia, chimica, matematica e problemi, scienze della terra. Ogni corso di laurea sceglie quali moduli sottoporre agli studenti. I test si svolgono nelle università in 4 sessioni ogni anno: Marzo, Settembre, Ottobre e Dicembre.

Il Professor Anzellotti ha presentato un'analisi del "successo" degli studenti nei corsi di laurea in relazione al punteggio nei test d'ingresso e al voto di diploma, dove per test si intendono quelli del modulo "mat_base" composto da 25 quesiti. Ciò che emerge da questa analisi è che non si riesce bene a capire se esiste una relazione tra il voto di diploma e il punteggio del test. Il Professor Claudio Casarosa, direttore del CISIA, sostiene che questa mancanza di correlazione sia dovuta al fatto che ci troviamo di fronte ad una popolazione di studenti che proviene da molte tipologie di scuola.

Inoltre, il Professor Roberto Ricci, dirigente del sistema di valutazione nazionale dell'INVALSI, ha parlato della valutazione dei test OCSE PISA. Egli sostiene che debba essere di dominio pubblico la quantità di dati che emergono da questi test, perché questa è necessaria al sistema per governarsi, agli studenti per auto-orientarsi, in modo da dare un indirizzo più razionale alle decisioni rilevanti.

Per fare ciò, è importante mettere a disposizione degli studenti prove utili al loro orientamento almeno nel periodo di ottobre o novembre dell'ultimo anno di scuola secondaria superiore e non già alla fine dello stesso. Questo non implica che gli studenti, in assenza del superamento di questi test, non possano ottenere risultati apprezzabili in futuro.

Il mondo accademico, infine, deve prestare particolare attenzione alla scuola primaria, perché tutto comincia da lì e la formazione scientifica va rivolta con particolare attenzione a questo segmento. Spesso, infatti, l'opinione diffusa è che la programmazione scientifica delle scuole primarie sia "semplice", perché i bambini sono piccoli; questo non è affatto così, perché, è proprio da lì che ha inizio un orientamento serio verso le lauree scientifiche.

Il PLS a Torino

Ornella Robutti (Università di Torino)

Modelli e loro rappresentazioni dinamiche

Lo scorso anno (2012-13) in Piemonte nel PLS Matematica si sono apportati cambiamenti significativi, perché si erano osservate, negli anni precedenti, delle criticità: all'inizio dell'anno scolastico, numerosi erano le classi e gli insegnanti iscritti alle attività del PLS, che, però, andavano via via diminuendo, a causa di altri non pochi adempimenti richiesti dalla scuola ai docenti.

Per ovviare a tale inconveniente:

1. si sono progettati dei moduli di lavoro "snelli" che permettessero ai docenti di partecipare in presenza a queste attività: si è prevista, quindi, una formazione di 18 ore, di cui solo 6 in presenza, 6 di studio autonomo e 6 di sperimentazione in classe, fondendo, in tal modo, sperimentazione e formazione. Inoltre, si è mirato ad adeguare maggiormente le attività PLS alle esigenze degli insegnanti, per andare incontro a quella co-progettazione di cui si diceva sopra. Questa non prevedeva solo di chiedere agli insegnanti degli adattamenti alla propria realtà di classe delle attività proposte dai formatori, ma anche la co-progettazione delle prove di verifica relative a una attività.
2. si sono coinvolte le istituzioni, in modo che fossero le scuole a iscriversi alle iniziative del PLS e non i singoli docenti, istituzionalizzando formalmente l'adesione al PLS. Conseguentemente, alla fine del progetto, si è consegnato alle scuole e non ai docenti un certificato di presenza da cui risultava se il docente avesse preso parte solo alla formazione o anche alla sperimentazione in classe.

Per quanto riguarda gli studenti, sono state proposte attività sotto forma di gare e giochi, non competitivi tra una classe e l’altra, formando squadre costituite da studenti di classi diverse. Infine, si sono presentate loro conferenze orientative sulle applicazioni della matematica e sulle svariate possibilità di lavoro.

In questo convegno, si è parlato di modelli di formazione docenti (PCK…), valutando anche la possibilità di superarli come si è verificato a Torino, dove si è implementato un modello innovativo che prende il nome di “Trasposizione Meta-Didattica”, che tende a osservare i docenti nel loro processo di formazione, al fine di verificare se parti tradizionali di insegnamento vengono sostituite da parti laboratoriali, anche mediante l’impiego di tecnologie.

Inoltre, si è cercato di lavorare molto a livello regionale e, quindi, sulla sinergia tra le diverse azioni di tipo istituzionale che sono in campo: ad esempio, si sono legate le attività PLS, da una parte, con le Indicazioni Nazionali e il progetto M@t.abel, dall’altra parte, con le prove INVALSI e infine con le azioni che l’università, a livello di Piemonte, organizza, come il convegno DI.FI.MA, le attività del GeoGebra Institute di Torino, la formazione della Casa degli Insegnanti.

Si presentano, infatti, in modo sistematico le attività PLS all’interno del convegno DI.FI.MA e si ospitano sulla piattaforma DI.FI.MA in rete (http://difima.i-learn.unito.it/) i contenuti delle attività PLS.

Infine, si fa sinergia con la formazione iniziale docenti cioè, col TFA lo scorso anno e, quest’anno, ci si propone di fare lo stesso con i PAS. Questi continui intrecci e collegamenti sono i canali attraverso cui passano grandi scambi di metodologie, di esperienze e di contenuti.

Così procedendo, in questo ultimo anno, ci si è assicurati l’adesione al PLS di circa 100 docenti e 2200 studenti, un numero sicuramente ragguardevole che prova l’utilità delle modifiche apportate.

BIBLIOGRAFIA E SITOGRAFIA

Aldon, G., Arzarello, F., Cusi, A., Garuti, R., Martignone, F., Robutti, O., Sabena, C. & Soury-Lavergne, S. (2013). The meta-didactical transposition: a model for analysing teachers education programs. *Proceedings of PME37*, Kiel, Germany, 97-124.

Arzarello, F., & Robutti, O., (2002). *Matematica*, La Scuola.

Arzarello, F., Cusi, A., Garuti, R., Malara, N., Martignone, F., Robutti, O., & Sabena, C. (2012). Vent'anni dopo: Pisa 1991 – Rimini 2012 Dalla ricerca in didattica della matematica alla ricerca sulla formazione degli insegnanti, XXIX SEMINARIO NAZIONALE DI RICERCA IN DIDATTICA DELLA MATEMATICA (http://www.seminariodidama.unito.it/mat12.php)

Arzarello, F., Robutti, O., Sabena, C., Cusi, A., Garuti, R., Malara, N., & Martignone, F. (2014). Meta-Didactical Transposition: A Theoretical Model for Teacher Education Programmes. In *The Mathematics Teacher in the Digital Era* (pp. 347-372). Springer Netherlands.

Ball, D. L., Thames, M.H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special?. *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12 (1), 73-112.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19 (2), 221-266.

Collins, A., Brown, J. S., & Newman, S. E. (1987). *Cognitive apprenticeship: Teaching the craft of reading, writing and mathematics* (Technical Report No. 403). BBN Laboratories, Cambridge, MA. Centre for the Study of Reading, University of Illinois.

Campbell, P. J. (2002). Farmer klaus and the mouse. *The UMAP Journal* 23 (2).

Campbell, P. J. (2007). Games of chance with multiple objectives. *Metrika* 66:305-313.

Even, R., & Ball, D. (2009). *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics*: The 15th ICMI Study, Springer.

García, F.J., Gascón, J., Ruiz Higueras, L.,& Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *ZDM*, 38(3), 226-246.

Hegedus, S. J., & Moreno-Armella, L. (2009). Intersecting representation and communication infrastructures. *ZDM*, 41(4), 399–412.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2002). *Raccomandazioni per l'attuazione delle Indicazioni nazionali per i piani di studio personali nella scuola primaria; allegati al decreto di attuazione del progetto nazionale di sperimentazione* (D.M. 100 del 18 settembre 2002).

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2010). *Indicazioni nazionali per il licei*. Allegato F (D.M. 211 del 7 ottobre 2010).

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2010). *Il Piano Lauree Scientifiche - Linee guida.* 29 aprile 2010

Pennac, D. (2008). *Diario di scuola*. Feltrinelli Editore.

Rasmussen, C., Zandieh, M., & Wawro, M. (2009). How do you know which way the arrows go? The emergence and brokering of a classroom mathematics practice. In W.-M. Roth (Ed.), *Mathematical representations at the interface of the body and culture*, 171-218. Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Sfard, A. (2005). What could be more practical than good research? On mutual relations between research and practice of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 58(3), 393 – 413.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Reasearcher*, 15(2), 4-31.

Smullyan, R. (1981). *Qual è il titolo di questo libro. L'enigma di Dracula ed altri indovinelli*. Bologna. Zanichelli.

UMI. (2001). *Matematica 2001. La Matematica per il cittadino: attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di matematica – Scuola Primaria e Scuola Secondaria di primo grado.*

UMI. (2003). *Matematica 2003. La Matematica per il cittadino: attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di matematica – Ciclo Secondario.*

Vosniadou, S. (2008). Knowledge Acquisition and Conceptual Change. *Applied Psychology*, 41(4), 347-357.

Wenger, E. (1998). *Communities of Practice: Learning, Meaning, and Identity*. Cambridge: Cambridge University Press.

Wood, T. (main ed.) (2008). *The International Handbook of Mathematics Teacher Education*, Sense Publishers.

http://www.matematicamente.it

http://www.lse.te.it/matematica/lavori/sezione.aurea.ppt

http://users.dma.unipi.it/franciosi/divu/videogame.pdf ("La matematica dei videogiochi" di Marco Franciosi)

http://blog.kleinproject.org ("Matrici e immagini digitali" di Dirce Uesu Pesco e Humberto José Bortolossi)

http://www.sciencebuddies.org (The Pixel Puzzle: Why Video Game Characters Look Better Today)

http://gamedevlessons.com/lessons/letter11.html (GameDevLessons.com Text Lessons Vol 11 - February 26, 2010 di Chris DeLeon)

http://www.progettolaureescientifiche.eu

http://community.geogebra.org/it/

http://difima.i-learn.unito.it/

http://www.wolframalpha.com/input/?i=integrate

http://risorsedocentipon.indire.it/offerta_formativa/f/index.php?action=home&area_t=f&id_ambiente=7

INDICE